論尤拉函数φ(n)的一些性質

王　元　　　　　　任建華

（中国科学院数学研究所）　　（西北大学数学系）

§1. 引　言

命$\varphi(n)$为Euler函数，关于集合$\left\{\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right\}$（$n=1, 2, \cdots$）的分布問題，Somayajulu[1]，Sierpinski及Schinzel[2][3]曾用算术的方法加以处理。华罗庚教授首先指出用Brun篩法处理这一問題的途徑。按这一方向，王元与Schinzel[4]及邵品琮[5]得到了下面的結果：

任意給于h个非負实数$a_1, \cdots, a_h$及$\varepsilon>0$，皆存在自然数n，使

$$\left|\frac{\varphi(n+\nu+1)}{\varphi(n+\nu)}-a_\nu\right|<\varepsilon \qquad (1\leq \nu\leq h). \tag{1}$$

进而言之，存在$X_0(a, \varepsilon)$及$C_0(a, \varepsilon)$，当$X>X_0$时，区間$1\leq n\leq X$中适合（1）式的整数n的个数不少于$C_0\frac{X}{\log^{h+1}X}$。

不用Brun篩法，目前尚仅能証明n的存在性，而对于区間$1\leq n\leq X$中适合（1）式的n的个数还沒有任何結果。

本文的目的是用Brun篩法及一些关于整值多項式的結果，將上述結果改进为：

定理1． 命$f(x)$为一个首項系数为正而常数項为零的k次整值多項式；又命h为一正整数，則对任意h个非負实数$a_1, \cdots, a_h$及$\varepsilon>0$皆存在自然数n，使

$$\left|\frac{\varphi(f(n)+\nu)}{\varphi(f(n)+\nu-1)}-a_\nu\right|<\varepsilon \qquad (1\leq\nu\leq h). \tag{2}$$

进而言之，存在仅与$f(x)$，ε及諸a_i有关的常数C_1及X_1，当$X>X_1$时，在任何区間$1\leq n\leq X$内，适合（2）式的n的个数不少于$\frac{C_1X}{\log^\gamma X}$，此处$\gamma$为多項式$F(x)=f(x)(f(x)+1)\cdots(f(x)+h)$的互異既約因子的个数。

本方法对其他数論函数的应用，在此不一一討論了。

§2. 兩　条　定　理

定理1． 可由下面兩条定理推出：

定理2． 命$m_0, m_1, \cdots, m_h$为$h+1$个正整数，滿足：$m_0=\{(h+1)k!\}^2m_0'$；$(m_i, m_j)=1$ $(i\neq j)$；m_0'的素因子均大于$(h+1)k!$；同余式$f(n)+\nu\equiv 0 \pmod{m_\nu}$可解。当$X>Z>k!m_0m_1\cdots m_h$时，命$N_Z(X)$表示方程式組

$$\begin{cases} f(n)=m_0x_0 \\ f(n)+\nu=\nu m_\nu x_\nu \qquad (1\le\nu\le h) \end{cases} \tag{3}$$

适合下面条件

$$1\le n\le X;\ x_i=y_iz_i;\ 若\ p|z_i\ 則\ p|m_i,\ 若\ p|y_i\ 則\ p>Z,\ (0\le i\le h) \tag{4}$$

的解 $(n,x_0,\cdots,x_h)$ 的組数。則存在仅与 $f(x)$ 及諸 m_i 有关的正常数 C_2,C_3,X_2，当 $X>X_2$ 时，

$$N_{X^{C_2}}(X)>\frac{C_3X}{\log^\gamma X}.$$

定理3. 任意給予 h 个非負实数 $a_1,\cdots,a_h$ 及 $\varepsilon>0$，皆存在仅与諸 a_i 及 ε 有关且滿足定理2要求的正整数 $m_0,m_1,\cdots,m_h$，使

$$\left|\frac{\dfrac{\varphi(m_1)}{m_1}}{\dfrac{\varphi(m_0)}{m_0}}-a_1\right|<\frac{\varepsilon}{2};\ \left|\frac{\dfrac{\varphi(\nu m_\nu)}{\nu m_\nu}}{\dfrac{\varphi((\nu-1)m_{\nu-1})}{(\nu-1)m_{\nu-1}}}-a_\nu\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ (2\le\nu\le h) \tag{5}$$

現在讓我們由定理2及定理3来推出定理1．首先由定理3，我們选取仅与諸 a_i 及 ε 有关且适合定理2要求之正整数 $m_0,m_1,\cdots,m_h$ 使(5)式成立。固定 $m_\nu(0\le\nu\le h)$ 之后，命 $(n,x_0,\cdots,x_h)$ 是方程組(3)适合(4)及 $Z=X^{C_2}$ 的一組解。由于 $\varphi(n)$ 是积性函数，故

$$\frac{\varphi(f(n)+\nu)}{\varphi(f(n)+\nu-1)}=\frac{\varphi(\nu m_\nu x_\nu)}{\varphi((\nu-1)m_{\nu-1}x_{\nu-1})}=\frac{\varphi(\nu m_\nu z_\nu y_\nu)}{\varphi((\nu-1)m_{\nu-1}z_{\nu-1}y_{\nu-1})}=$$

$$=\frac{\dfrac{\varphi(\nu m_\nu)}{\nu m_\nu}\cdot\dfrac{\varphi(y_\nu)}{y_\nu}}{\dfrac{\varphi((\nu-1)m_{\nu-1})}{(\nu-1)m_{\nu-1}}\cdot\dfrac{\varphi(y_{\nu-1})}{y_{\nu-1}}}\cdot\frac{f(n)+\nu}{f(n)+\nu-1}\quad(2\le\nu\le h);$$

$$\frac{\varphi(f(n)+1)}{\varphi(f(n))}=\frac{\dfrac{\varphi(m_1)}{m_1}}{\dfrac{\varphi(m_0)}{m_0}}\cdot\frac{\dfrac{\varphi(y_1)}{y_1}}{\dfrac{\varphi(y_0)}{y_0}}\cdot\frac{f(n)+1}{f(n)}.$$

由于 $1\ge\dfrac{\varphi(y_\nu)}{y_\nu}=\prod\limits_{p|y_\nu}(1-\dfrac{1}{p})\ge(1-\dfrac{1}{X^{C_2}})^{\frac{k+1}{C_2}}\longrightarrow1$ (当 $X\to\infty$)。故存在仅与 m 及 ε 有关之常数 $X_3>X_2$，当 $X>X_3$ 及 $n>X_3$ 时，

$$\left|\frac{\varphi(f(n)+\nu+1)}{\varphi(f(n)+\nu)}-a_{\nu+1}\right|<\varepsilon\quad(0\le\nu\le h-1).$$

因此，我們証明了当 $X>X_3$ 时，凡(3)适合(4)及 $Z=X^{C_2}$ 的一組解 $(n,x_0,\cdots,x_h)$，我們就得到了一个适合定理1要求的 n，不同的解所对应的 n 亦自不相同，又(3)式适合(4)及 $n\le X_3$ 之解数最多只有 X_3 組。

故由定理2可知存在仅与 $f(x)$，ε 及諸 a_i 有关的常数 C_1 及 X_1，当 $X>X_1$ 时，区間 $1\le n\le X$ 中适合(2)式的 n 的个数不少于 $C_1X/\log^\gamma X$。

§3. 定 理 3 的 証 明

引1 (Nagell)[6]。命 $G(x)$ 为一 k 次整值多項式，其互異的既約因子个数为 γ。当 $p>k$ 时，以 $\omega(p)$ 表示适合同余式

$$G(x)\equiv 0\ (mod\ p),\qquad 0\le x<p \tag{6}$$

的x的个数．则

$$\prod_{k<p\le X}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\sim\frac{\mu_G}{log^{\gamma}X};$$

$$\sum_{k<p\le X}\frac{\omega(p)}{p}=\gamma\ loglogX+\rho_G+o(1);$$

$$\sum_{k<p\le X}\frac{\omega(p)}{p}log\ p=\gamma\ logX+O(1),$$

此处μ_G，ρ_G及与"o"，"O"有关的常数均仅与$G(x)$有关．

定理3的証明：命$\rho_\nu=\frac{\varphi(\nu)}{\nu}$，$1\le\nu\le h$；$\rho_0=\frac{\varphi((h+1)k!)}{(h+1)k!}$．則存在有理数$\frac{b_\nu}{d_\nu}>0$ 使

$$\left|\frac{b_\nu}{d_\nu}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\qquad(1\le\nu\le h);$$

即
$$\left|\frac{\dfrac{b_1\cdots b_\nu\, d_{\nu+1}\cdots d_h}{b_1\cdots b_h\, d_1\cdots d_h}}{\dfrac{b_1\cdots b_{\nu-1}\, d_\nu\cdots d_h}{b_1\cdots b_h\, d_1\cdots d_h}}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ \frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\qquad(1\le\nu\le h).$$

記 $\frac{b_1\cdots b_\nu\, d_{\nu+1}\cdots d_h}{b_1\cdots b_h\, d_1\cdots d_h}=\eta_\nu$ $(0\le\nu\le h)$．則上式可写为

$$\left|\frac{\eta_\nu}{\eta_{\nu-1}}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\qquad(1\le\nu\le h).$$

显然$0<\eta_\nu\le1$．由于引理1可以推出$\prod'_{k<p}(1-\frac{1}{p})=0$． 此处$\prod'_{k<p}$表示通过所有大于$k$而又使同余式$f(x)\equiv0\ (mod\ p)$有解之素数。由此立刻得知$f(x)\equiv0\ (mod\ p)$有解之素数$p$有无穷多．因 $\frac{\varphi(m)}{m}=\prod_{p|m}(1-\frac{1}{p})$.故可以在使同余式$f(x)\equiv0(mod\ p)$有解之素数$p$中选取$p_{01},p_{02},\cdots,p_{0l_0}$.（諸$p_{0i}$均大于$(h+1)k$）使$\left|\prod_{i=1}^{l_0}(1-\frac{1}{p_{0i}})-\eta_0\right|<\varepsilon_1$．此处$\varepsilon_1>0$为給定的一正数．記$p_{01}\cdots p_{0l_0}=m_0'$.

当m_0'选定之后，由引理1显然可以得出$\prod''_{\substack{k<p\\ p\nmid m_0'}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$，此处$\prod''_{p}$表示通过所有使$f(x)+1\equiv0\ (mod\ p)$有解之素数$p$．在使此同余式有解之$p$中（此$p$需大于$(h+1)k$而又除不尽$m_0'$）选取若干$p_{11},p_{12},\cdots,p_{1l_1}$．使$\left|\prod_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{1}{p_{1i}}\right)-\eta_1\right|<\varepsilon_1$．記$p_{11}\cdots p_{1l_1}=m_1$．显然$(m_0',m_1)=1$．

續行此法共$h+1$次，可得滿足定理2要求的$m_0',m_1,\cdots,m_h$．滿足$\left|\frac{\varphi(m_0')}{m_0'}-\eta_0\right|<\varepsilon_1$；

$$\left|\frac{\varphi(m_\nu)}{m_\nu}-\eta_\nu\right|<\varepsilon_1\quad(1\le\nu\le h).$$

取 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(a,\rho,\varepsilon)=\varepsilon_1(a,\varepsilon)$ 适当小，则

$$\left|\frac{\frac{\varphi(m_\nu)}{m_\nu}}{\frac{\varphi(m_{\nu-1})}{m_{\nu-1}}}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\ (2\le\nu\le h);\ \left|\frac{\frac{\varphi(m_1)}{m_1}}{\frac{\varphi(m_0')}{m_0'}}-a_1\frac{\rho_0}{\rho_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

故得定理3.

§4. 定理4及定理5

命 $M=k!m_0m_1\cdots m_h$; $p_1<p_2<\cdots<p_r\le Z$ 为不超过 Z 且与 M 互素的所有素数. 由于 $F(x)$ 的次数为 $k(h+1)<p_1$，故可以命适合同余式

$$F(x)\equiv0\pmod{p_i}\quad(r\le x\le p_i+r-1,\ r\text{ 为整数})\tag{7}$$

的 x 的个数为 $\omega(p_i)(1\le i\le r)$.

記适合(7)式的 x 为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i\omega(p_i)}$，$(1\le i\le r)$.

命 λ_0; $\lambda_1,\cdots,\lambda_h$ 分别表示适合下面同余式的 x

$$f(x)\equiv0(mod\ m_0)(1\le x\le k!m_0);\ f(x)+\nu\equiv0\ (mod\ m_\nu)\ (1\le\nu\le h,\ 1\le x\le m_\nu).\tag{8}$$

由孙子定理知道下面的联立同余式在区間 $1\le x\le M$ 中有解

$$\begin{cases}x\equiv\lambda_0(mod\ k!m_0)\\ x\equiv\lambda_i(mod\ m_i)\quad(1\le i\le h).\end{cases}\tag{9}$$

記其解为 λ. 可知当 $x\equiv\lambda(mod\ M)$ 时，则 $F(x)\equiv0\ (mod\ M)$.

当 $X>Z>M$ 时，命 $M_Z(X)$ 表示适合下面条件的 n 的个数

$$1\le n\le X,\ n\equiv\lambda(mod\ M),\ n\not\equiv a_{ij}(mod\ p_i)\ (1\le i\le r,\ 1\le j\le\omega(p_i))\tag{10}$$

定理2显然可以由下面两条定理推出:

定理4. $N_Z(X)\ge M_Z(X)$.

定理5. 存在仅与 M，h，$f(x)$ 有关的正常数 C_4，C_5，X_4，当 $X>X_4$ 时，有

$$M_{X^{C_4}}(X)\ge\frac{C_5X}{\log^\gamma X},$$

此处 γ 为 $F(x)$ 的不同旣約因子的个数.

定理4的証明: 取 n 适合(10)式，则由 λ 的定义，得出

$$\begin{cases}f(n)=m_0x_0.\\ f(n)+\nu=m_\nu x_\nu'\quad(1\le\nu\le h).\end{cases}\tag{11}$$

因为 $(f(n)+\nu,\ m_\mu)=(f(n)+\mu+\nu-\mu,\ m_\mu)=(\nu-\mu,\ m_\mu)\quad(\mu\ne0,\ \mu\ne\nu).$

$(f(n)+\nu,\ m_0)=(\nu,\ m_0)=\nu\ (1\le\nu\le h)$

又由于 $n\not\equiv a_{ij}(mod\ p_i)(1\le i\le r,\ 1\le j\le\omega(p_i))$ 得出

$$(F(n),\ p_1\cdots p_r)=1.$$

故(11)式变为

$$\begin{cases}f(n)=m_0x_0\\ f(n)+\nu=\nu\,m_\nu x_\nu\quad(1\le\nu\le h)\end{cases}$$

此处 $p\,|\,x_i$，则 $p\,|\,m_i$ 或 $p>Z$.

这就是說，对于适合条件(10)的一个n，即得到方程組(3)而又适合(4)的一組解。不同的n对应的解显然是不同的。故得定理。

定理5的証明依靠于Brun方法，其証明可以参考Ricci[7]。为完整及清楚起見，仍將証明写于后。

§5. 若 干 引 理

命适合条件(10)的n的个数为$P(\lambda, a, M, X; p_1,\cdots p_r)(=M_Z(X))$为簡便起見，記

$$P(\lambda, a, M, X; p_1,\cdots p_r)=P(X, M; p_1,\cdots p_r) \tag{12}$$

特别$P(X, M)$表示适合下面条件的n的个数

$$1\le n\le X, \qquad n\equiv\lambda\ (mod\ M) \tag{13}$$

引2. $P(X, M; p_1,\cdots p_r)=P(X, M; p_1,\cdots,p_{r-1})-\omega(p_r)P(X, Mp_r; p_1,\cdots,p_{r-1})$。

証：按定义可知$P(X, M; p_1,\cdots,p_{r-1})-P(X, M; p_1,\cdots,p_r)$为滿足下面某一条件的$n$的全体

$$1\le n\le X;\ n\equiv\lambda\ (mod\ M);\ n\not\equiv a_{ij}(mod\ p_i)\ (1\le i\ge r-1,\ 1\le j\le\omega(p_r);\ n\equiv a_{rl}\ (mod\ p_r),$$
$$(1\le l\le\omega(p_r)). \tag{14}$$

由孙子定理可知下面的同余式組

$$\begin{cases} n\equiv\lambda(mod\ M)\\ n\equiv a_{r1}(mod\ p_r),\end{cases}\quad \begin{cases} n\equiv\lambda(mod\ M)\\ n\equiv a_{r2}(mod\ p_r),\end{cases}\quad\cdots,\quad \begin{cases} n\equiv\lambda(mod\ M)\\ n\equiv a_{r\omega(p_r)}(mod\ p_r).\end{cases}$$

都在区間$1\le n\le Mp_r$中有唯一的解。分別記为$\lambda_l\ (1\le l\le\omega(p_r))$。故諸条件(14)即

$$1\le n\le X;\ n\equiv\lambda_l\ (mod\ Mp_r)\ (1\le l\le\omega(p_r));\ n\not\equiv a_{ij}\ (mod\ p_i)$$
$$(1\le i\le r-1,\ 1\le j\le\omega(p_i)) \tag{14'}$$

按定义滿足諸条件(14′)的n的个数为$\omega(p_r)P(X, Mp_r; p_1,\cdots,p_{r-1})$。故得引理。

陆續用引2 r次得

引3. $P(X, M; p_1,\cdots,p_r)=P(M, X)-\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\omega(p_\alpha)P(X, Mp_\alpha; p_1,\cdots p_{\alpha-1})$。

命 $r=r_0\ge r_1\ge\cdots\ge r_m$为任意給定的$m$个正整数。

引4.
$$P(X, M; p_1,\cdots,p_r)\ge P(X, M)-\sum_{\alpha=1}^{r}\omega(p_\alpha)P(X, Mp_\alpha)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\substack{\beta\le r_1\\ \beta<\alpha}}\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)P(X, Mp_\alpha p_\beta; p_1,\cdots,p_{\beta-1}).$$

証：由引3即可推出。

陆續运用引4 m次，并注意$P(X, Mp_1\cdots p_\mu; p_1,\cdots,p_{\mu-1})\le P(X, Mp_1\cdots p_\mu)$。則得

引5.
$$P(X, M; p_1,\cdots,p_r)\ge P(X, M)-\sum_{\alpha=1}^{r}\omega(p_\alpha)P(X, Mp_\alpha)+$$
$$+\sum_{\substack{\alpha\le r\\ \alpha>\beta}}\sum_{\beta\le r_1}\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)P(X, Mp_\alpha p_\beta)-\sum_{\substack{\alpha\le r\\ \alpha>\beta>\gamma}}\sum_{\beta\le r_1}\sum_{\gamma\le r_1}P(X, Mp_\alpha p_\beta p_\gamma)+$$

$$+\cdots-\overbrace{\sum_{\alpha\leq r}\sum_{\beta\leq r_1}\sum_{\gamma\leq r_1}\sum_{\delta\leq r_2}\cdots\sum_{\mu\leq r_m}}^{2m+1}{}_{\alpha>\beta>\cdots>\mu}\,\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)\cdots\omega(p_\mu)P(X,\ Mp_\alpha\cdots p_\mu).$$

引6. $$M_Z(X)\geq\frac{XE}{M}-R,$$

此处

$$E=1-\sum_{\alpha\leq r}\frac{\omega(p_\alpha)}{p_\alpha}+\sum_{\substack{\alpha\leq r\\ \alpha>\beta}}\sum_{\beta\leq r_1}\frac{\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)}{p_\alpha p_\beta}-+\cdots$$

$$-\overbrace{\sum_{\alpha\leq r}\sum_{\beta\leq r_1}\sum_{\gamma\leq r_1}\sum_{\delta\leq r_2}\cdots\sum_{\mu\leq r_m}}^{2m+1}{}_{\alpha>\beta>\cdots>\mu}\frac{\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)\cdots\omega(p_\mu)}{p_\alpha p_\beta\cdots p_\mu};$$

$$R=1+\sum_{\alpha\leq r}\omega(p_\alpha)+\sum_{\substack{\alpha\leq r\\ \alpha>\beta}}\sum_{\beta\leq r_1}\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)+\cdots$$

$$+\overbrace{\sum_{\alpha\leq r}\sum_{\beta\leq r_1}\sum_{\gamma\leq r_1}\sum_{\delta\leq r_2}\cdots\sum_{\mu\leq r_m}}^{2m+1}{}_{\alpha>\beta>\cdots>\mu}\,\omega(p_\alpha)\omega(p_\beta)\cdots\omega(p_\mu).$$

証：由于$P(X,D)$的定义可知

$$P(X,\ D)=\left[\frac{X}{D}\right]+\bar\theta_D=\frac{X}{D}+\theta_D\quad(\bar\theta_D=0\text{ 或 }1,\ |\theta_D|\leq1).$$

將上式代入引5卽得引6.

§6. E 的 估 計

取 $l=(1.2)^{\frac{1}{\tau}}$，由Nagell定理，可知存在$\delta_0(>M)$，当$\delta\geq\delta_0$时有

$$\sum_{\delta<p\leq\delta^l}\frac{\omega(p)}{p}<0.2=\tau.\quad\prod_{\delta<p\leq\delta^l}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}<1.25=\lambda. \tag{15}$$

当 $1\leq j\leq t$ 时，命 p_{r_j} 为不超过 $Z^{\frac{1}{l^j}}$的最大素数，此处$p_{r_t}\geq\delta_0$，但不超过$Z^{\frac{1}{l^{t+1}}}$的最大素数 $p_{r_{t+1}}$ 則不滿足关系 $p_{r_{t+1}}\geq\delta_0$。取m使$2m>2t+r_t$，并命$r_{t+1}=\cdots=r_m=r_t$。

命$E_n^{(\nu)}$为E内分母恰好含ν个素数且每个素数之指标皆大于r_n之諸項之和。当$1\leq n\leq t$时，命

$$E_n=1-E_n^{(1)}+\cdots+E_n^{(2n-2)}-E_n^{(2n-1)}.$$

命 $S_n^{(\nu)}$ 表示集合$\left\{\frac{\omega(p_{r_n+1})}{p_{r_n+1}},\ \cdots,\ \frac{\omega(p_{r_{n-1}})}{p_{r_{n-1}}}\right\}$的$\nu$次初等函数。

易算出当$\nu\geq1$，$1\leq n\leq t$时

$$\nu S_n^{(\nu)}\leq S_n^{(1)}\ S_n^{(\nu-1)}.$$

故由(15)得

$$S_n^{(\nu)} < S_n^{(\nu-1)}, \quad S_n^{(\nu)} \le \frac{(S_n^{(1)})^\nu}{\nu!} < \frac{\tau^\nu}{\nu!} \quad (1 \le n \le t, \ \nu \ge 1). \tag{16}$$

由定义可知

$$E_n^{(\nu)} = S_n^{(\nu)} + S_n^{(\nu-1)} E_{n-1}^{(1)} + \cdots + S_n^{(1)} E_{n-1}^{(\nu-1)} + E_{n-1}^{(\nu)} \quad (n \ge 1).$$

命

$$\pi_n = \prod_{r_n < i \le r_{n-1}} \left(1 - \frac{\omega(p_i)}{p_i}\right) \quad (1 \le n \le t)$$

则得

$$E_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{2n+1} (-1)^\nu E_{n+1}^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{2n+1} (-1)^\nu \sum_{i+j=\nu} S_{n+1}^{(i)} E_n^{(j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j E_n^{(j)} \sum_{i=0}^{2n+1-j} (-1)^i S_{n+1}^{(i)}$$

$$= \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j E_n^{(j)} \left\{ \pi_{n+1} - \sum_{i > 2n+1-j} (-1)^i S_{n+1}^{(i)} \right\} \quad (1 \le n \le t-1).$$

由(16)即得

$$E_{n+1} \ge \pi_{n+1} E_n - \Phi_{n+1} \quad (1 \le n \le t-1) \tag{17}$$

此处

$$\Phi_{n+1} = \sum_{j=0}^{2n-1} E_n^{(j)} S_{n+1}^{(2n+2-j)} \quad (1 \le n \le t-1).$$

同样可知

$$E_1 \ge \pi_1 - S_1^{(2)} \tag{18}$$

由(16)及归納法可得

$$E_n^{(\nu)} \le \frac{(n\tau)^\nu}{\nu!} \quad (1 \le n \le t). \tag{19}$$

由(16)及(19)得

$$\Phi_{n+1} = \sum_{j=0}^{2n-1} E_n^{(j)} S_{n+1}^{(2n+2-j)} \le \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(n\tau)^j}{j!} \cdot \frac{\tau^{2n+2-j}}{(2n+2-j)!}$$

$$\le \frac{\tau^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{j=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{j} n^j = \frac{\tau^{2n+2}}{(2n+2)!} (n+1)^{2n+2} \tag{20}$$

由于 $2m > 2t + r_t$。故續用(17)及(18)得

$$E = \prod_{i=1}^{r_t} \left(1 - \frac{\omega(p_i)}{p_i}\right) E_t \ge \prod_{i=1}^{r_t} \left(1 - \frac{\omega(p_i)}{p_i}\right) \left(\pi_t E_{t-1} - \Phi_t\right) \ge$$

$$\geq\cdots\geq\prod_{i=1}^{r_t}\left(1-\frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)\cdot\pi_1\cdots\pi_t\left(1-\frac{S_1^{(2)}}{\pi_1}-\frac{\Phi_2}{\pi_1\pi_2}-\cdots\cdots-\frac{\Phi_t}{\pi_1\cdots\pi_t}\right).$$

故由(15),(16),(20)得

$$E\geq\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)\left(1-\frac{\tau^2\lambda}{2!}-\frac{\tau^4 2^4\lambda^2}{4!}-\cdots-\frac{\tau^{2t}t^{2t}}{(2t)!}\lambda^t\right)$$

$$>\prod_{\substack{p\leq Z\\ p\nmid M}}\left(1-\frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}[(n+1)\tau]^{2n+1}}{(2n+2)!}\right)$$

因为$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+0.5)}$当$n\geq 0$时为递减函数. 故$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+0.5)}\leq 2$.

因此

$$\frac{\lambda^{n+1}[(n+1)\tau]^{2n+2}}{(2n+2)!}\bigg/\frac{\lambda^n(n\tau)2n}{(2n)!}=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\lambda\frac{((n+1)\tau)^{2n+2}}{(n\tau)^{2n}}\leq\frac{\lambda\tau^2e^2}{2}.$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}[(n+1)\tau]^{2n+2}}{(2n+2)!}<\frac{\lambda\tau^2}{2!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\tau^2e^2}{2}\right)^n<\lambda\tau^2<0.05.$$

故

$$E>0.95\prod_{\substack{p\leq Z\\ p\nmid M}}\left(1-\frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)\tag{21}$$

§7. R 的 估 計

由于$\omega(p_i)\leq(h+1)k$，故得

$R\leq(1+(h+1)kr)(1+(h+1)kr_1)^2\cdots(1+(h+1)kr_t)^2(1+(h+1)kr_t)^{2(m-t)}$。由于$r_t$及$m$都是仅与$f(x)$及$M$有关的常数，及显然有$1+(h+1)kr_i\leq r_i^2\leq p_{r_i}^2$故得

$$R\leq C_6r^2r_1^4r_2^4\cdots r_t^4\leq C_6p_r^2p_{r_1}^4\cdots p_{r_t}^4\leq C_6Z^{2+\frac{4}{l}+\frac{4}{l^2}+\cdots}\leq C_6Z^{2+\frac{4}{l-1}}\tag{22}$$

此处C_6为仅与$f(x)$及M有关之常数。

定理5的証明: 由引6得

$$M_Z(X)\geq 0.95X\prod_{\substack{p\leq Z\\ p\nmid M}}\left(1-\frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)-C_6Z^{2+\frac{4}{l-1}}$$

取 $Z=X^{\frac{1}{[2+\frac{4}{l-1}]+1}}$, $C_4=\frac{1}{[2+\frac{4}{l-1}]+1}$. 由Nagell引理得

$$M_2C_4(X)>\frac{C_5X}{\log^{\gamma}X}\quad(X>X_4)$$

定由証完。

附記：作者之一王元曾用分析方法証明，例如：

对于任何h个非負实数$a_1,\cdots,a_h$及$\varepsilon>0$，皆存在素数p，使

$$\left|\frac{\varphi(p+\nu+1)}{\varphi(p+\nu)}-a_\nu\right|<\varepsilon\qquad(1\leq\nu\leq h),$$

进而言之，存在$\bar{C}(a,\varepsilon)$及$\bar{X}(a,\varepsilon)$，当$X>\bar{X}$时，区間$1\leq p\leq X$中适合上式的素数p中的个数多于$\frac{\bar{C}x}{\log^{h+2}X\log\log\bar{X}}$。（見[8]）。

A Note on some Properties of the Euler Function $\varphi(n)$

Wang Yuan (Institute of Mathematics, Academia Sinica)

Jen Chien-hua (Depa,tmmt of Mathematics, North—Western University)

Abstract

The object of the present note is to prove the following

Theorem 1. Let $f(x)=\alpha_nx^n+\cdots+\alpha_1x\ (\alpha_n>0)$ be an integral valued polynomial. Then for any finite given sequence of non—negative numbers $a_1,\cdots,a_h$ and $\varepsilon>0$, there exists a posive integer n such that

$$\left|\frac{\varphi(f(n)+\nu)}{\varphi(f(n)+\nu-1)}-a_\nu\right|<\varepsilon\quad(1\leq\nu\leq h).$$

Moreover, there exist positive constants $X_1=X_1(f(x),a,\varepsilon)$ and $C_1(f(x),a,\varepsilon)$ such that for $X>X_1$, the number of integers n satisfying the above inequalities in the interval $1\leq n\leq X$ is greater than $C_1\frac{X}{\log^{\gamma}X}$, where γ is the number of the different irreducible factors of the polynomial $F(x)=f(x)(f(x)+1)\cdots(f(x)+h+1)$.

The case of $f(x)=x$ gives a theorem of Wang and Schinzel, also of shao.

参 考 文 献

(1) B. S. K. R. Somayajulu, The Euler's totient functiou $\varphi(n)$, Math stud. 18 (1951), 31.

(2) A. Schinzel and W. Sierpinski, Sur quelques propiétes des fonctions $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$, Bull acad polen. Sci, cl. Ⅲ; 2 (1954), 463

(3) A. Schinzel, On Functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$, Bull. Acad. polen. Sci, cl. Ⅲ; 8 (1955), 415.

(4) A. Schinzel and Y. Nang, A note on some Properties of the Functions $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ and $\theta(n)$, Bull Acad. Polen. Sci; cl Ⅲ; 4 (1956), 207.

(5) 邵品琮，論某一类数論函数值的分佈問題，北大學报，3 (1956), 261.

(6) T. Nagell, Généralisation dun théoréme de Tehebycheff, Journ de Math. (8) 4 (1921), 343.

(7) G. Ricei, Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann, Annali del. R. Scu. Nor. Sup di Pisa (2) 6 (1937), 70.

(8) 王元：論数論函数$\varphi(n)$，$\sigma(n)$及$d(n)$的一些性質，数学学报，8:1 (1958),