

冯康准则和它的计算力学指针性意义

周天孝

2020 年元旦

面对力学设计的计算分析不可避免的两类复杂性：物理复杂性和几何复杂性，“差分”替代“微分”的离散化路线显得十分的日暮途穷。电子计算机的计算能力逼使计算方法创新的潮流不可阻挡。冯康先生不负历史重任，在科技落后于苏美的高科技领域，做出了重大的科学计算贡献。冯康先生的计算方法创新，由于新方法生不逢时，出世之后，连刊载原创性论文的学报都被停刊，冠名权拱手让给西方，被称之为“有限元法”而扬名世界。

“有限元法”由参加波音公司的飞机结构计算机分析、发展所谓“直接刚度法”的美国教授命名。“有限元”与“直接刚度法”的理念一致。“直接刚度法”将飞机结构的力学模型分解成“杆”、“纯剪力板”和“梁”等力学性状相对简单的“元件”组合，基于“单元刚度矩阵”得到“节点力”，借助“节点力”叠加获得计算近似模型。这一理念推广应用于弹塑性力学，变分原理只是导出“刚度矩阵”的方便手段。

这一有强烈“位移法”胎记的离散化理念，与冯康以“理论模型的表达优选”和“保持问题固有的数学物理特征”为准则的离散化，有本质的不同。冯康理念有更重要的计算力学指导意义，值得深入研讨。

“变分原理” $\oplus$ “区域剖分插值”的有限元法只是冯康准则应用于包括弹性力学在内的、用椭圆微分方程表达的物理问题近似计算的一种产物。在冯康的原创性论文“基于变分原理的差分格式”[1]中，所创导的离散化准则完整系统，有更普遍的指导性意义。它们由如下四个要件组成：

Criteria for a good discrete model

- (1) Preservation of mathematical physical characteristics of the problem;
- (2) Required accuracy;
- (3) Cost-effectiveness in computing time and computer storage;
- (4) Simplicity, universality, flexibility and easiness in apprehension.

由于“保持问题的数学物理特征”为这一准则的核心，冯康先生进一步补充提出“the judicious choice at the outset among the alternative formulations as the working basis is of crucial importance”。也就是说，由于物理问题的数学理解的深入，理论模型有微分方程表达的特征、“守恒律”型表达的积分方程特征和变分原理表达的“极小”或“鞍点”特征等等的不同，不同的表达在“微积分学框架”下是“等价”的，但基于不同“等价”表达的离散模型保持问题固有数学物理特征的差异可以很大，计算经验发现“等价”可以“数值不等效”。于是，“The judicious choice is of crucial importance”，挑选出最能保持问题固有数学物理特征的理论模型表达，以使离散模型与“客观真实”之间的误差最小，应当是“保持特征”离散化企图实现的目标。

就弹性力学而言，基于上述准则的离散化理念，最早发现保持“位移的 Sobolev 空间特征”对于计算弹性力学有关键重要性的，是冯康！虽然 R. Courant 最早提出“区域剖分” $\oplus$ “分片插值”的离散方法以改进 Ritz 方法，但使 Ritz 方法和 Courant 方法脱

胎换骨, 首先发现这种离散本质上是 Sobolev 空间的子空间离散的, 也是冯康! 首先发现“保持问题固有的数学物理特征”就能为区域剖分插值近似提供计算精度和收敛性稳定性保证的, 更是冯康! 实现这些“最早发现”所依据的基本理论不是结构力学, 而是冯康论文参考文献引用的 Sobolev 空间理论, 和 Sobolev & Mikhlin[2] 对于力学变分原理更加普遍化的泛函分析理解.

为了更进一步理解冯康准则及其对发展科学计算的指针性意义, 特做补充阐释如下:
(1) 产生冯康准则的一个背景; (2) 坚持冯康准则是计算力学的最佳解决方案.

首先谈谈第一个问题.

我所了解的冯康准则产生的背景, 是国家援建印度尼西亚万隆“亚非会议”大厦的计算分析任务. 由北京建筑设计院承接的这项建筑设计, 采用“飞鸟壳”形式的薄壳屋顶设计方案, 遭遇应力应变分析的严重困难, 呈请中科院计算所三室用计算机计算分析技术协助, 三室二组由曹维潞老师具体承担. 最初的力学模型和计算方法皆由北建总设计师提供, 计算所承担编程计算, 但计算结果总是“误差太大”. 北建遂请计算所三室提供更佳理论模型和计算方法, 全面负责“飞鸟壳”薄壳屋顶的计算分析研究. 任务在冯康先生的领导下, 采用苏联力学家的“薄壳理论”和“二阶椭圆方程的差分格式”, 计算结果仍不为北建认可的情况下, 改为基于最小势能原理的变分表达和差分离散. 虽然二阶差分降为一阶差分, 由于导出的近似模型因解算的系数矩阵“对称正定”, 保持薄壳方程的“自共轭椭圆”特征, 计算结果的精度不降反升, 竟然从北京建筑设计院第一次得到“认可”, 出现了质的提升. 似乎计算研究还要深入之际, 由于“印尼政变”, “飞鸟壳”应力应变的计算研究终止. 在我知道的有关研究背景有限的情况下, 1965 年末冯康先生依然情绪高涨十分兴奋地在计算所三室二组召集了一次有部分人员参加的, 不像总结会的小型鼓动会. 有王荇贤、崔俊芝、赵静芳和曹维潞等参加. 我作为“飞鸟壳”计算的帮工也参加了会议, 是因为当时使用的 104 计算机内存容量太少, 变分差分计算“飞鸟壳”近似的大型线性代数方程组, 需要人工计算叠加系数矩阵的非零系数, 得到最省存储的计算公式. 曹维潞一个人实在忙不过来, 正值我的研究生毕业论文完成之后等待评审答辩有空闲, 要我负责这一变分差分计算公式叠加整理任务, 故我作为“飞鸟壳”项目的辅助人员也获机会参加了这个印象深刻的会议. 在会上, 冯康先生意气风发宣称, “我们超越世界先进水平的新型计算方法已经创立, 相信能够得到普遍推广使用”. 由于印尼发生 1965 “10-30” 推翻总统和反华政变, “亚非会议大厦”停建, “飞鸟壳”项目不了了之, 也由于对冯康先生领导的其它研究状况一无所知, 听到冯先生的上述高调宣布, 我当时感觉茫然, 内心怀疑“先生是否实事求是”. 直到几个月后, 读完在“计算数学与应用数学”1965 年末期刊出的创新大作, 加上知道上述几经“模型选择”才获“好计算结果”的坎坷曲折, 才认识到“超越世界先进水平”的研究确实的产生了! 论文用求解区域有内部接触间断界面的弹性力学问题的微分方程表达的物理复杂性和差分法遭遇的几何复杂性, 与力学变分原理表达的普适简单性和数学物理特征的明确统一, 所做的论证对比, 十分有说服力地让人明白偏微分方程数值解已经进入“保特征”离散化的历史新阶段. 基于 Mikhlin[2] 对最小势能原理的“广义”弹性力学理解, 计算实践经验经

过理性认识提升的“保特征”离散化的冯康理念, 实际上指出: 计算弹性力学与“客观真实”之间的误差最小化已经实现, 仅仅不可压缩弹性或接近不可压缩弹性介质的计算, 另当别论.

最后谈一谈冯康的离散化准则对于计算力学高性能方法普遍性的准则性意义.

首先请注意, 我们并不认为力学变分原理的“极小”或“鞍点”形式有普遍性意义. 最小势能原理与传统的 Sobolev 空间性质两者综合, 能够发现: 变形微分算子 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) := \{\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\}$ 是 $\boldsymbol{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ 映射到泛函 $\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, d\Omega$ 的对偶空间上的“闭算子”, 才真正是弹性力学的固有数学物理特征. 这一特征既是可压缩弹性力学广义解存在唯一的充分必要条件, 对于理解弹塑性力学、流体力学的应力应变规律也有普遍性意义. 也就是说, 我们不仅能够证明: “保特征”离散化, 即泊松比 $\nu < \frac{1}{2}$ 的标准有限元模型, 就是“力学保真”离散化, 即这一离散化模型不只是近似模型, 也是所有弹性力学规律都被严格满足的模型! 而且我们能够基于 Banach's Closed Range Theorem (闭值域定理)[3] 推导出这一特征的一系列等价条件, 获知包括流体力学在内的连续介质力学应力应变机理更深刻的数学物理特征, 为理解不可压缩或接近不可压缩介质的力学, 奠定统一的数学物理基础.

事实上, 将有限元法收敛性稳定性分析的 Lax-Milgram 定理的抽象框架具体化为 Sobolev & Mikhlin[2] 框架, 特别因为 $\|\boldsymbol{v}\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\Omega)}$, 能够指出: 弹塑性力学的数学物理特征应当是: 变形微分算子 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow \{L^2(\Omega)\}_{ij}$ 是闭算子, 其中 $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega) : \boldsymbol{v}|_{\Gamma_0} = 0\}$, $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ 是泛函分析惯用泛函空间, Γ_0 是求解区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的某部分.

基于这一认知, $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \forall \boldsymbol{v} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\}$ 的对偶空间 U 上, 存在算子 $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$ 的对偶算子 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T$ (dual operator)[3], 使下式成立:

$$\langle (\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{U \times U'}, \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in U \times V.$$

其中 $V := H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, V' 或 U' 表示 V 或 U 的对偶空间, $\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{U \times U'} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, d\Omega$ 是应变能泛函, U 是应力空间.

Banach's Closed Range Theorem [3] 断言: $(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T$ 也是“闭算子”. 除此之外, 借助 Green 公式导出的“能量关系”: 对于足够光滑的应力 $\boldsymbol{\tau}$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, ds &= \int_{\Omega} [\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})] \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \cdot T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \, d\Omega, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{aligned}$$

其中, $T_M := \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) \\ \operatorname{div} & 0 \end{bmatrix}.$

容易证明: 对于任何足够光滑且满足应力边界条件 $(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n})|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} = 0$ 的 Cauchy 序

列 $\{\boldsymbol{\tau}_n\}_0^\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}_0\|_U = 0$, 由于 $\boldsymbol{v} \in V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, $\|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{U'}$, 以及

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n + (\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}_0\|_{V'} &= \sup_{\boldsymbol{v} \in V} \frac{\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n + (\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{U'}} \\ &\leq \sup_{\boldsymbol{v} \in V} \frac{\langle \boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{U \times U'}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{U'}}, \end{aligned}$$

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n + (\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}_0\|_{V'} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}_0\|_U = 0.$$

故称 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}_0$ 是序列 $\{-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n\}_0^\infty$ 的极限. 因为 $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = -(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau}_n$ 与 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T \boldsymbol{\tau} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$, 统一起来, 可以称算子 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot))^T$ 为负的广义散度微分算子, 且

$$\langle -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{U \times U'}, \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in U \times V.$$

对于这样扩充定义在所有可能应力空间 U 上的广义散度算子, 能够证明: 弹性力学混合边界值问题的标准有限元解 $\boldsymbol{u}_h$ 产生的应力

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \frac{E}{1-2\nu} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \cdot \delta_{ij} \right\} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{u}_h),$$

满足“力平衡方程”:

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{v} \rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,$$

即

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{f}_h,$$

其中

$$\langle \boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{v} \rangle = \begin{cases} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle, & \forall \boldsymbol{v} \in V_h, \\ 0, & \forall \boldsymbol{v} \in (V_h)^\perp, \end{cases}$$

$V_h \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ 是有限元位移子空间, $(V_h)^\perp \oplus V_h = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, δ_{ij} 是 Kronecker delta, $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) - \{\frac{1}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \cdot \delta_{ij}\}$.

因此, 有限元模型是对应于外载荷 $\boldsymbol{f}_h$ 的严格弹性力学模型, 不能认为力学规律被近似. 鉴于此, 我们可以简称“保持力学固有数学物理特征”的离散化为“力学保真”离散化. 这样的近似模型无疑应是最佳的离散化!

对于“力学保真”概念, 力学家或许对此要提出异议: 有限元模型不满足“作用与反作用定律”, 怎么能称为“力学保真”? 本文认为并非如此, 关键在于“作用”的正确理解. 与传统的理解不同, 我们认为任何内子域 $K \subset \Omega$ 上的力学状态变量场 $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v})$, 对外部介质的“作用” $\oint_{\partial K} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, ds$ 应由广义的能量关系定义, 即

$$\oint_{\partial K} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, ds = \int_K \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{T}_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \, d\Omega,$$

其中 T_M 是上述微积分学意义的泛函分析扩充, div 是广义微分算子, 且是 $\varepsilon(\cdot)$ 的“对偶算子”. 因此, T_M 称为“作用”生成微分算子.

对于有限元解 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)$, 因为

$$\oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \cdot T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

可以容易证明在任何内子域 K 的边界 ∂K 上, 由上定义的“作用”与其“反作用”是完全平衡的, 即 ∂K 上的作用

$$\oint_{\partial K} (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_i \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_K \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \cdot T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \, d\Omega$$

与反作用

$$\oint_{\partial K} (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_e \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega \setminus K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \cdot T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \, d\Omega.$$

因为

$$\left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0,$$

“作用”与“反作用”求和得“作用与反作用定律”成立如下:

$$\oint_{\partial K} (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_i \cdot \mathbf{v} \, ds + \oint_{\partial K} (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_e \cdot \mathbf{v} \, ds = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

其中 $(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_i$ 是指 $\mathbf{n}$ 为 K 的“外法向”, 而 $(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_e$ 中 $\mathbf{n}$ 是 K 的外部 $\Omega \setminus K$ 在共同界面 ∂K 上的单位外法向, $(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_i$ 和 $(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n})_e$ 中的单位外法向, 量值相同方向相反. 总之, 广义的力学规律被有限元模型严格遵循.

基于广义的力学理念, 冯康准则的计算力学指针性意义得到阐明. 发展高性能的计算力学, 必须深入认知力学固有的数学物理特征!

值得指出: $-\text{div}$ 与 $\varepsilon(\cdot)$ 互为“对偶算子”蕴涵所有满足边界条件的应力和位移组成的力学状态空间 (Phase Space) 能够表达为

$$U \times V = \left\{ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) : \left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0 \right\}$$

即向量空间 $U \times V$ 以反对称二次型

$$\left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0$$

为特征. 其物理意义是: 力学状态变量 $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})$ 在 Ω 内处处满足“作用与反作用定律”.

基于弹塑性力学问题的解空间, 即力学状态空间的上述数学物理特征, 弹塑性力学齐次边值问题, 无论介质是可压的, 亦或是不可压缩的, 有如下统一表达:

求

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \left\{ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) : \left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0 \right\},$$

使力平衡方程 (或线动量平衡)

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$$

和物理本构方程

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma})$$

成立. 即,

求

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \left\{ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) : \left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0 \right\}$$

使

$$\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) \\ \operatorname{div} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f} \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma})$ 可以是线弹性, 或非线性的塑性函数关系. 将 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ 分解为胀缩变形 $\{\frac{1}{3}\operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \delta_{ij}\}$ 与剪切变形 $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \{\frac{1}{3}\operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \delta_{ij}\}$ 之和, 上述统一表达为不可压缩及接近不可压缩介质的各类问题提供统一的分析和计算框架.

这一“作用”生成算子主导的反对称一阶拟线性广义微分方程组, 也是坐标变换不变的形式, 故称为弹塑性力学的典则表达 (Canonical formulations).

将位移 $\mathbf{v}$ 的力学意义改为流场速度, 因为流体力学的应力 $\boldsymbol{\tau}$ 与速度 $\mathbf{v}$ 之间数量关系由“作用率与反作用率定律”规定, 其状态空间特征仍为:

$$\left\{ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) : \left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, T_M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\rangle_{(\Omega)} = 0 \right\}.$$

容易明白, 只须将体力 $\mathbf{f}$ 加入惯性力, 将本构关系函数 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma})$ 加入温度和流体密度变量的贡献, 并补充密度满足的质量守恒律方程和温度满足的热力学内能方程, 不同于传统的 Navier-Stokes 方程表达的广义流体力学方程组得到. 其应力与应变之间的数量关系和状态空间形式与弹塑性力学完全相同.

因此, 如果粘性流体动力学有相对的“客观真理性”, 即它与“客观真实”之间的误差被认可, 那么流体力学实验观察到的, 航空航天飞行器附面层流场复杂的“多尺度”流动, 无论多么复杂并且因飞行速度 (亚音速, 跨音速和超音速) 的不同而可以彼此十分不同, 它们既然是由流体力学规律制造出来的, 也应当能由“力学保真”离散化模型越来越精准地获得复制. 基于此, “保特征”离散化准则, 不仅对于可压缩与不可压缩弹塑性力学的统一的 Locking-free 计算, 也对于 CFD 有高度的针对性.

总之,“力学保真”离散化是能实现的!虽然能够实现的力学问题仍然太少,不可压缩弹性都尚未能实现,但是,企图成就高可靠高性能的计算力学,“保特征”离散化指出前进方向.

本文原载于《冯康先生纪念文集》

参考文献

- [1] 冯康. 基于变分原理的差分格式. 应用数学与计算数学, 2:4, pp 238–262, 1965. 英文翻译见冯康文集 (1), pp 180–209, 国防工业出版社, 1994.
- [2] Mikhlin, S.G. Problem of Minimum of Quadratic Functional. *Moscow*, 1952 (in Russian) 有中文译本.
- [3] Yosida, K. Functional Analysis. *Spring-Verlog, New York*, 1966.