

为复兴中华数学开未来

■ 张鸿庆

中华数学源远流长，东汉《九章算术》，魏晋《刘徽注》，宋元之间李冶立天元一，朱世杰创四元术，以实际问题为主旨，以构造性机械化为特色，几何代数化，代数运算系统化，开解析几何之先河，丰功伟业，光照千古。

天元术至元末而息，乾嘉诸子，谈天三友，以复兴国算为己任，志不可谓不高，用功不可谓不勤，虽使不传之学复见天日，发扬光大则为力所不及。近世治数学者，谈古言必称希腊，论今言必称欧美，天元术几成绝学。

吴先生道济天下之溺，文起六百七十年之衰，为前贤继绝学，为后世指方向，为数学机械化奠基，为复兴中华数学开未来。云山苍苍，江水泱泱，先生之风，山高水长。

一、前进无路弃小技 后学有幸遇大师

1956年吴先生与钱学森、华罗庚两先生同获国家首届自然科学一等奖，当时我在大学三年级，虽然对吴先生的得奖工作完全不懂，但心中充满敬仰之情。1957年我大学毕业，分配到大连工学院。当时大连工学院的数学教师主要从事教学工作，不仅无人作数学研究，而且认为搞数学研究的人是走白专道路。当时虽然不支持研究数学理论，却提倡理论联系实际，我就去结合力学，主要的任务是解微分方程。由于当时学校没有电子计算机，主要任务是构造解析解。但是构造解析解十分困难，即使对线性常系数偏微分方程组也十分困难，没有一般的方法，已有结果都有高度的技巧性，只适用一种特殊情形，不能推广到其他情形。1964年我们发现用代数方法可以将线性弹性力学方程组的各种解统一起来，并且可以得到一些新的解析解。后来由于政治运动，工作停顿，直到1978年才得以发表，并且将这些结果推广到电动力学方程及其他方程组。虽然这项工作得到一些力学界前辈的支持，但是继续前进却遇到极大的困难。1991年我们将结果推广到线性变系数偏微分方程组，但计算极其复杂，无法应用。当时搞微分方程的人几乎都搞理论，几乎无人求解，求解的人都搞数值解，几乎无人求解析解，而且有人认为求解析解是条死路。在理论上我们也遇到许多困难，根据实际问题，我们需要构造性代数几何，到处向人请教，有的专家向我们推荐，吴先生在这方面有重要贡献。1991年我们邀请高小山博士到大工讲学，他介绍了吴先生的学术思想和他的工作，并且回答了我们困惑已久的许多问题，虽然我们当时既不理解更不会应用，但是吴先生的学术思想使我们眼界大开，给我们指明了前进的方向。1992年，吴先生特批我们参加他所主持的攀登项目以及后来关于数学机械化的973项目，有幸成为吴先生领导的学术队伍中的一员，成为我个人学术生涯重要的转折点。从1991年至今，十八年来我们一方面努力学习吴先生的学术思想，一方面将吴先生的学术思想和

我们的工作结合起来，道路既漫长又曲折，但不断有新的发现，给我们带来极大的乐趣。

下面介绍我们学习吴先生学术思想的体会，这里包括我个人的一些看法，有不当之处希望得到批评和指正。

二、一个中心 两个基本点

根据我们的体会，我们将吴先生的学术思想归结为一个中心两个基本点：

一个中心：“我们的目标是明确的，即是推行数学机械化，使作为中国古代数学传统的机械化思想光芒普照于整个数学的各个角落。” [1]

两个基本点：数学机械化所以可能，归根结底在于消去法与结式等可以机械化的进行构造性运算。 [2]

吴先生在1986年写道：“经过对中国古代数学的学习和触发，结合着几十年来在数学研究道路上探索实践的回顾与分析，终于形成了这种数学机械化的思想。这种思想一旦形成，就自然地化成一股顽强的动力。十几年来，作者一直在这一方向道路上摸索前进，艰苦奋斗，义无反顾。” “这不仅是可取的，也是可行的。问题不在于能不能做，而在于愿不愿做，也在于肯不肯敢不敢。” 先生之言铁中铮铮，穿云裂石，掷地有声，壁立万仞，闻者莫不动容。

Poincaré说：“如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状”。吴先生补充说：“特别是研究这门科学在中国的历史和现状”。“要真正了解中国的传统数学，首先，必须撇开西方数学的先入之见，直接依据目前我们所能掌握的我国固有数学原始资料，设法分析与复原我国古时所用的思维方式和方

才有可能认识它的真实面目。”吴先生言出行随，以身作则，对中国数学史作了独到而深刻的研究。

吴先生指出数学有两条发展路线，“一条是从希腊欧几里得系统下来的，另一条是发源于中国，影响到印度，然后影响到世界的数学。这条线现在不太显著，所以一讲到数学就是欧几里得统治下的，以演绎为主的公理化数学，”“我国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性与机械化为其特色的算法体系，这与西方数学以欧几里得《几何原本》为代表的所谓公理化演绎体系正好遥遥相对。《九章》与《刘注》是这一机械化体系的代表作，与公理化的代表作欧几里得《几何原本》可谓东西辉映，在数学发展的历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长，交替成为数学发展中的主流。肇始于我国的这种机械化体系，在经过明代以来近几百年的相对消沉后，势必重新登上历史舞台。”

M. Klein 说：“代数虽在埃及和巴比伦人开创时是立于算术的，但希腊人却颠覆了这个基础而要求立足于几何。”吴先生认为，希腊传统的排斥数量关系于几何之外的研究方式可能给数学包括几何带来严重的后果。他怀疑欧几里得几何那种单纯依靠艰涩而迂曲地进行推理的方式是造成数学发展一度停顿的主要原因之一。中国古代数学在宋元时期达到高峰。北宋时期天元术（半符号代数）萌发于太行山一带，并在北方获得很大的发展，李冶（1192–1279）得洞渊九容之说，日夕玩绎，以天元术为主攻方向，用自己的辛勤劳动使天元术成长为一棵参天的大树。天元术经过二元术、三元术迅速发展为朱世杰的四元术。朱世杰于1303年出版《四元玉鉴》，他集前贤之大成，建立了四元高次方程理论，用天、地、人、物表示四个未知数，相当于今天的 x 、 y 、 z 、 u ，他非常熟练地掌握了多元高次方程组的解法，将多元高次方程组依次消元，最后只余下一个未知数，从而解决了整个方程组

的求解问题。“一气混元，两仪化元，三才运元，四象会元，阴阳升降，进退左右，互通变化，错综无穷”，技巧也已达到炉火纯青的境地。天元术以勾股重差一类问题为立术的应用，李冶的《测圆海镜》(1248)与《益古演段》(1259)全部是以勾股为主题的天元术的应用。朱世杰的《四元玉鉴》中勾股测望八问全部用天元术求解。宋元数学家为了发展天元术而建立了一整套代数机器，包括天、地、人、物等元的正负乘幂以及这些代数式的运算系统。在几何问题中以天、地、人、物等元代替所求线段，用它们的代数式来表示几何图形长度、面积，然后运用相伴发展的那套代数机器求解。几何代数化、代数方法在几何上的应用以及代数式的使用与代数运算的系统化都取得了光辉的成就，中国传统数学已经到达了解析几何的门口。

元代以后，中国传统数学嘎然而止，明朝末年天元、四元诸术已成绝学，中国和印度的数学经由阿拉伯学者传到西方。十六世纪欧洲发生一系列深刻的变化。F. Vieta (1540–1603) 于1591年出版《解析学入门》，以文字代替方程系数，引入代数的符号运算。他把解析法分为三类：

- (1) Zetetic 分析，化问题为方程法；
- (2) Poristic 分析，由方程推出定理法；
- (3) Exegetic 分析，解方程的方法；

并且认为使用这些方法和原则没有解决不了的问题。

Descartes (1596–1650) 继 Vieta 的未竟之业，他看到代数的巨大潜力，把代数看成是进行推理，特别是关于抽象的未知量进行推理的有效方法。他认为代数使数学机械化，使思考和运算步骤变得简单，使数学创造变成一种几乎是自动化的工作。1628–1630年期间，撰写了一篇方法论的论文《指导思维的法则》，1701年发表。他的目标是建立一个包罗万象的知识框架，拟议一个解决问题的普遍方法，适用于解决一切类型的问题，他提出Descartes化归原则：

- (1) 把任意问题归结为数学问题；
- (2) 把任意数学问题化为代数问题；
- (3) 把任意代数问题化为解代数方程。

吴先生指出：“回顾我国从秦汉到宋元之间数学发展的历程，我国传统数学所走过的道路正好与 Descartes 的计划若合一契；反过来，Descartes 的计划也无异于为中国传统数学作了一个很好的总结。”

微积分的发明从 Kepler 与 Galileo 到 Newton 与 Leibniz 经历过一段艰难的历程。“极限的概念，作为微积分学的真正基础，对于希腊人来说完全像是一个外国人。”吴先生指出，从刘徽以至宋代的我国十进制小数法，与极限概念一衣带水。西方数学史家盛称所谓的 Cavalieri 原理，早就见于祖冲之父子的著作。微积分的发明乃中国式数学战胜希腊式数学的产物。

“数学如此多娇，引无数学子竞折腰。昔牛顿欧拉，开山立业；高斯黎曼，续领风骚。一代宗师，莱布尼兹，三百年来指航标。俱往矣，数风流人物有待明朝。”微积分的先驱者 Wallis 把微积分当作无穷的算术，Newton 和 Leibniz 算术化了微积分，在代数的基础上建立微积分。18 世纪的数学家继续认为微积分是代数的推广，继续向前推进。Euler 是代数化算术化大师，他广泛使用代数类比，指出一条数以千计的以后可以严密建立起来的结果的途径。算法学家是为解决特殊类型问题设计算法的数学家，Euler 是设计算法的大师。从 Newton, Leibniz 到 Euler, Lagrange，他们认为任意函数能展成无穷级数，而无穷级数是多项式的推广，微积分是代数的扩展，是具有无穷多项式的代数。他们是不严格的，然而充满创造性。Euler 不会用 ϵ - δ 语言证明级数收敛性，却成功地求出许多级数的和。“牛顿欧拉代数体，轻薄为文晒未休，只知严格公理化，不识创造是主流。”他们是不严格的，然而他们才是微积分的创造者，没有他们就没有微积分。

Gauss既是存在性大师，也是构造性大师，代数基本定理是非构造性的，Gauss消去法则是构造性的杰作。构造性数学是许多重要数学理论的源泉。椭圆积分，椭圆函数，Abel积分和Abel函数在19世纪处于数学的中心，几乎是评论数学家成就的试金石，从Gauss, Abel, Jacobi, Riemann到Klein, Poincaré, 无不因在这个领域的贡献而闻名，而Riemann和Weierstrass更是因为他们对Abel函数的工作而一举成名。吴文俊指出，在西方数学研究的一个转折点是 invariant theory，在此之前的数学是构造性的而且当时要求必须如此，要证明存在性就必须同时给出求法，这当然是一种束缚。

Leibniz终生努力的主要动机是要导出一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，力图发明一种对概念进行演算的理论使得概念将象数一样进行代数演算。一切推理过程、思维过程都象数学一样能够计算，甚至能够交给机器完成。因此他是符号逻辑的先驱，数学机械化的先驱，甚至是脑力劳动机械化的先驱。他将微积分当作处理符号 d 和符号 $\int$ 的算法，精心设计一套符号和演算，使我们能像代数一样机械化地完成。更重要的是，Leibniz高瞻远瞩主张将东方文化和西方数学结合起来，以后我们还将继续讨论，这个见解有深远的意义。

Leibniz是数学机械化的先驱，但是直到19世纪末以后Hilbert及其追随者们建立并发展了数理逻辑，这一问题才具有明确的数学形式。吴先生指出，Hilbert是公理化大师，但他在其公理化代表作《几何基础》中却指出如何从公理化通过代数化走向机械化的数学构想，从Leibniz开始的机械化证明的思想，通过Hilbert学派得到明确的数学形式，而只有电子计算机的出现才使这一设想有现实的意义。众所周知，吴先生在实现这一设想方面取得重大的突破。

多年来我们一面学习吴先生的学术思想，一面参照吴先生的学术思想总结我们的工作，十年前我将我们的工作总结成下面一首诗：

一语终身业，两句尽平生；

新开非线性，无限未了情。

一语终身业：用机械化方法解方程。

设 $Au=0$ 为给定的难于求解的方程，构造变换 $u=Cv$ 将 $Au=0$ 变换成易于求解的方程 $Dv=0$ ，将“一语终身业”与吴先生的“一个中心”相比，显然“一语终身业”是吴先生的“一个中心”的一部分。

两句尽平生：(1) $A \circ C = B \cdot D + R$ (2) $\text{CKer} D = \text{Ker} A$.

(1) $A \circ C = B \cdot D + R$ ，共有9个符号，也叫独孤九符，对不同的问题将这9个符号赋予不同的含义。令 $A=3$, $C=7$, $B=2$, $D=8$, $R=5$, $\circ = \cdot = \times$ ，则 $A \circ C = B \cdot D + R$ 变成 $3 \times 7 = 2 \times 8 + 5$ ，因此 $A \circ C = B \cdot D + R$ 是带余除法的推广。由于算术=四则运算，算法=算术+ X ， X =极限，延拓……， $A \circ C = B \cdot D + R \supset$ 四则运算，因此独孤九符是算法之宗。当 $Au=0$ 是算子方程组时，最常见的约化方法就是消去法，消去法的基础也是带余除法，在这种情形独孤九符与消去法是一致的，亦即与吴先生的提法是一致的。由于解方程 $Au=0$ 时，经常取 $R=0$ ，此时独孤九符变成 $A \circ C = B \cdot D$ ，也叫 $AC=BD$ 模式 [3-7]。

(2) $\text{CKer} D = \text{Ker} A$ 可以写成超定方程组 $Cv = u$ ， $Dv = 0$ 的可解条件为 $Au = 0$ ，也可解释成 $Cv = u$ 和 $Dv = 0$ 有公共解 v 的条件为结式 $Au = 0$ ，因此这个提法与吴先生的提法也是一致的。

新开非线性：这首诗写于十年前，在这之前我们的工作了解线性算子方程，当时非线性方面的工作刚刚开展，近十年来我的合作者在非线性方程求解方面作了大量的工作，独孤九符和 $AC=BD$ 模式也推广到非线性情形。

无限未了情：吴先生的目标是“推行数学机械化，使作为中国古代数学传统的机械化思想光芒普照于整个数学的各个角落。”同时吴先生也指出“我们离目标的实现还无比遥远，根本看不到头。”“我

们的研究工作还只是一个开端，如何继续发扬中国古代传统数学的机械化特色，对数学各个不同领域探索实现机械化的途径，建立机械化的数学，则是本世纪绵亘整个21世纪才能大体趋于完美的事情。”

“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索”下面谈谈我们上下求索的体会。

三、数学机械化与数学原理化

吴先生指出：“中国古代数学的大多数成就具有构造性、算法化和机械化性质，因此大多数的‘术’可以无困难地转化为程序用计算机来实现。中国古代数学家善于从简明的事实得出深刻的结论，并总结成简洁的原理。正是这些简单易明而应用广泛的原理，形成了中国古代数学的独特风格。”数学机械化与数学原理化是中国古代数学的两大特色，也是我们要探索的主题。

关于数学机械化吴先生提出两个重要的研究课题：

(1) 吴先生指出：“尽管某一数学领域整个来说是不可能机械化，但并不排除其中一部分可以机械化，如何发现这样一些可以机械化的部分领域，提出切实可行的机械化方法，又是一项高度理论的探索性问题，只有对该领域有深邃认识才有解决希望。”对这个问题我们有如下想法：假设一个学科是一些定义定理的集合，如果这个集合有一个子集，其中的定义和定理都用等式表达，那么这一部分可以机械化。假设这一子集有 n 组定义， $u_1, u_2, \dots, u_n$ ， $u_{k+1} = C_k u_k$ ， $k=1, 2, \dots, n-1$ ，即第 $k+1$ 组定义用第 k 组定义来定义，由 u_k 推出的定理集合为 $A_k u_k = 0$ ，那么这一领域可用 $AC=BD$ 模式来机械化，参考文献[7]对此作了分析。许多重要定理如Darboux定理、曲面论基本定理、Frobenius定理、活动标架基本定理、Lie群基本定理和Cartan-Kahler定理都可用这个模式推出。

(2) 吴先生提出复兴构造性数学。在代数方程理论中, 代数基本定理十分重要, 但是要进一步求出根式解, 按照 Galois 理论就必须有所限制, 自然提出以下问题:

- a) 对给定的方程如何计算它的 Galois 群, 判断给定方程有无根式解?
- b) 如果有根式解, 如何求出解的表达式?
- c) 如果没有根式解, 能否扩大求解的工具 (例如包括 Fuchs 函数) 求出解的表达式? 将代数方程的解限定为根式解, 就像几何作图限定用圆规和无刻度的直尺一样, 从实用的观点看, 扩大求解的工具, 例如给尺标上刻度是很自然的。如果我们能扩大求解范围, 给出有效的高次代数方程求解公式, 应该是很意义的。

对微积分有类似的问题:

- a) 给定初等函数, 如何判定它的原函数是否是初等函数? Liouville 定理回答了这个问题。
- b) 如果是初等函数, 如何求出这个函数? Bronstein 的书讨论了这个问题, 但效率值得研究。
- c) 如果不是初等函数, 能否向初等函数集合添加一个函数, 使得所有初等函数的原函数都属于这个集合?

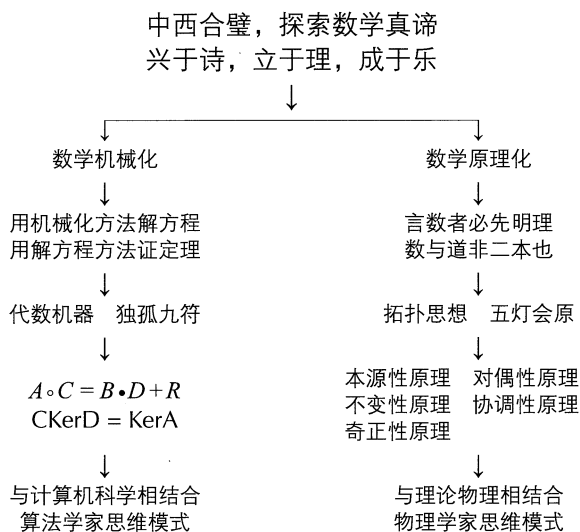
一般地, 对给定方程 $Au=f$, $Dv=0$ 是函数 v 的定义方程, 能否找到算子 C 使 $Au=f$ 的任何解 u 都可以表示成 $u=Cv$? 如果 $Au=f$ 是代数方程, $Dv=0$ 形如 $x^n - a = 0$, 这个问题就归结为根式解问题。如果 $A = \frac{d}{dx}$, f 是初等函数, $Dv=0$ 是定义初等函数的方程, 这个问题就归结为初等函数积分。如果 A 是微分算子, 这个问题就变成求微分方程的初等函数解。我们可以期望 Galois 理论、Liouville 定理和 Picard-Vessiot 理论都是这个一般理论的特例。

下面讨论数学的原理化体系。Euclid《几何原本》建立了定义、公理、定理、证明构成的演绎系统，成为近代数学推理论证的典范。现在的数学书籍大都采用这个模式，定义定理证明模式，也叫DTP模式，优点是严格精确，缺点是只讲推理不讲道理，只讲证明不讲发明，不讲定义定理从何而来，例子很少。有人说“现代数学只有两种，即有定理而没有应用例子的数学与只有例子而没有定理的数学。[8]”数学书越来越多，越来越难懂。杨振宁先生把数学书分为两类，一类他看了第一页不想看第二页，另一类他看了第一行就不想看第二行。吴先生说：“数学，不论是学习还是创新，最耗时费力的劳动往往是消耗在定理的证明上，而不是在真理的发明发现上。事实上，一个定理即使对其证明在逻辑上经历了严格的细致的逐步检验，也无非是说明知道定理正确无误而已，还不足以说明真正懂得了这个定理。自然证明是完全必要的，证明的严密性也是完全必需的，但更重要的应是定理之为何发明、如何发明、如何起作用这一类问题。”

吴先生所说的问题，也是我们长期探索的问题，通过长期的摸索，结合对吴先生学术思想的学习，我们认为数学原理化有助于学习和创新。吴先生说：“西方的欧几里得体系着重抽象概念与逻辑思维及概念与概念之间的逻辑关系，与之相反，我国的传统数学则基本上是一种从实际问题出发经过分析提高而提炼出一般的原理、原则与方法，以最终达到解决一大类问题的体系。”“Euclid体系以许多定义与公理为出发点，然后据此进行逻辑推理求体积，与之不同，我国古代几何着眼于总结经验，综合事实提炼出寥寥几条普遍而平凡的一般原理，然后用逻辑推理推导出多种多样的结果来。这种方法正与整个经典力学可以建立在三条牛顿定律上者相类似。”吴先生进一步提出：“中学几何课上讲公理不如讲原理，例如三角形全等的条件就是一个原理。我们选择若干个原理将几何内容串起来，比公理系统要好。”在物理学中经常用各种原理，Newton力学的三大定律就是三

个原理，一部经典力学就是从三个原理推演出来。Einstein的广义相对论也是建立在两个原理之上，物理学家学习数学的方式非常值得我们学习。有人说，Witten他们大概从来不做数学习题，但却能用最快的速度学习他们所需要的数学。虽然物理学家的推导很多时候是不严格的，但这些猜想往往最后都被证明是正确的。多年来我们一面学习吴先生的学术思想，一面结合多年的教学经验和科研经验，在教学工作中提出五个原理：本源性原理、对偶性原理、不变性原理、协调性原理和奇正性原理，简称“五灯会原”，并用于教学工作中，取得很好的效果 [9, 10]。

多年来我们在研究数学机械化的同时，还致力于数学的原理化、道理化、诗词化和艺术化。既讲公理又讲原理，用几条基本原理将许多数学领域统一起来；既讲推理又讲道理，道理=道+理，“言数者必先明理”，“数与道非二本也”。从新的角度看数学，系统地阐述数学的许多领域。“兴于诗，立于理，成于乐”，像感受诗词一样感受数学给我的快乐。中国传统文化是个丰富的宝藏，但需用科学的方法去发掘提炼，“中西合璧，探索数学真谛”给我极大的乐趣。



原理化机械化取长补短；思想性构造性相映生辉。

方向已明，涓滴虽微，有成江河之理；持之以恒，日就月将，学有缉熙于光明。

(作者为大连理工大学数学科学学院教授)

参考文献

- [1] 吴文俊, 吴文俊论数学机械化, 济南: 山东教育出版社, 1996。
- [2] 范德瓦尔登, “代数几何引论”中译本序言, 科学出版社, 2008。
- [3] 张鸿庆, 弹性力学方程组一般解的统一理论, 大连工学院学报, 1978, 18(3)。
- [4] 张鸿庆, Maxwell 方程的多余阶次与恰当解, 应用数学和力学, 1981年 03 期。
- [5] 张鸿庆、杨光, 变系数偏微分方程组一般解的构造, 应用数学和力学, 1991, 12(2): 135–139。
- [6] Zhang Hongqing, Fan EG., Applications of mechanical methods to partial differential equations, Mathematics Mechanization and Applications (17th chapter), Academic Press Limited (2000)。
- [7] 张鸿庆, 数学机械化中的 $AC = BD$ 模式, 系统科学与数学, 2008 28(8): 1030–1039。
- [8] 小平邦彦, 数学的印象, 与数学大师面对面, 浙江大学出版社, 2007。
- [9] 张鸿庆, 泛函分析, 大连理工大学出版社, 2008。
- [10] 张鸿庆, 流形上的微积分, 大连理工大学出版社, 2008。