

吴文俊先生为什么说“数学是笨人学的” ？

原创 2017-05-11 曹志刚 知识分子



撰文 | 曹志刚（中国科学院数学与系统科学研究院）
责编 | 徐可



引子

刚刚仙逝的数学大师吴文俊先生近些年接受媒体采访时经常说这样一句话，“数学是笨人学的”。这让很多人大惑不解。明明只有聪明人才学得来数学嘛，数学好基本上就是脑袋瓜聪明的同义词，笨人怎么学数学呢？

君不见各种智力测试不都是数学题吗？很多学校竞争优质生源以及分快慢班不也经常只看数学水平吗？千里挑一的公务员考试每年也都有几道数列题，这跟行政能力其实没有任何的直接关系。这几道经常被大家评论为挺变态的数学题也就是个智力测试。

更何况，吴文俊先生所谓的“学习”，可不是我们中文语境中一般意义上的学习，他说的是英文词“study”，不是我们所讲的研究性学习，而是实实在在的研究。这就更让人没法理解了。因为家喻户晓众所周知，能从事数学研究以至于有所成就的家伙，哪个不是思维超群有相当天分的？什么英年早逝的伽罗瓦、阿贝尔，直觉惊人的拉马努金，失明后依然能做学问的欧拉、庞特里亚金，一辈子靠妈妈照顾的厄多仕、佩雷尔曼，哪个不是有相当的传奇色彩甚至有点不食人间烟火？普通人哪做得了数学？更别提笨人了。这些事实和故事，做出过世界一流成果、晚年又潜心研究数学史的吴先生比我们不知要谙熟多少倍。



►著名数学家吴文俊（图片来自中科院网站）

那他怎么又会说出“数学是笨人学的”这样的话呢？吴先生本人没有对这句话做过过多的解释，至少媒体上找不到。本文中笔者尝试解读一下这句颇令人费解的话，并探讨一下其背后的逻辑对于整体把握中学数学中常用的几种思想方法，包括分类讨论法、数学归纳法、反证法、分析法、综合法，有何启发。我们还将顺便涉及这个视角下数学直觉与思维定势的关系，以及什么是好的解题方法的判别标准问题。

其实我们都很笨

对于理解充满神奇的大自然、纷繁芜杂的社会、浩瀚无穷的宇宙，甚至我们幽暗深邃的内心，人类的思维能力实在太有限了。素数，多么朴素简单的东西，人类研究了几千年至今还有数不清的难题等待解决；初等几何，初中生就学的东西，任何数学家也不敢说随便拿出来一道棘手的问题都能很快解决；前几年不是有新闻说记者给某位菲尔兹奖获得者一道我们的小学奥数题，他做了十几分钟也没头绪吗？前沿的计算复杂性理论暗示了有些知识人类可能永远无法获知。这不是简单的哲学上的悲观不可知论，而是来源于扎扎实实的硬证据。

所以有句俗语说得好，“人类一思考上帝就发笑”。但无所不知的上帝因此也无法像我们人类一样欣赏这个神奇的世界。

笨人的思考方法

承认我们笨、承认我们思考能力有限绝不等于自暴自弃放弃思考，越是这样越需要努力啊。人类之所以能进化到今天，能比其它物种都更适应环境更多地掌控自己的生活 and 命运，主要靠的就是不断思考不断创造新工具。那么笨人面对一个复杂的问题如何思考解决之道呢？那就要采取非常务实而积极的态度和策略。

1.适当放弃精确和严密

因为我们能力实在有限，所以过于追求绝对的精确和严密，很可能一无所获无法取得任何进步。

分类是人类认知的一个最核心最基本的途径之一。简单来讲，这种途径就是将差不多的东西看做一类，而同一类的东西思考和处理的时候不做区别。当遇到一个新鲜事物的时候，先尝试将其归入已有类别，若发现无法归类则建立新的类别。这样做的好处是非常利于记忆和思考。当然，这要以损失精确和严密为代价。分类这种思维方式如此之基本以至于已经成为人类本能的一部分。它所涵盖的范围以及对我们生活影响之深刻可能会让我们多数人非常吃惊。

姑且不提分类是很多学科的基本研究范式，单举几个我们日常生活中的小例子：为什么我们天生对软软的蠕动的东西有恐惧感？因为我们会把这类东西跟蛇联系在一起（即便从来没有见过甚至听说过蛇）。本能决定了我们在做出任何精确判断（是蛇还不是蛇）以前就做出反应（把它归入蛇的一类并迅速离开），这已经写入了我们的基因；为什么我们对图片和视频会有喜怒哀乐以及恐惧的反应，明明知道它们是虚假的？因为我们的本能无法区分这种虚假和现实；为什么我们会觉得外国人都长得差不多而区分中国人则容易得多？因为我们对经常打交道的自己人的分类要比对不经常打交道的外国人的分类细致得多……

当然，放弃精确和严密所意味的绝不仅仅是分类。比如跟分类密切相关的归纳（注意不是数学归纳）也是这个逻辑的产物。见了那么多天鹅发现都是白色的，那么就假设天鹅都是白的好了。这样假设有没有问题？严格来讲当然有问题，谁能保证你碰到的下一只天鹅不是黑色的？事实上，黑天鹅的确存在。可是在没有遇到黑天鹅之前暂时接受这个结论是很务实的选择，因为这样总算对世界有一些认识（尽管这个认识不见得精确）。而且，即便以后发现了黑天鹅，我们也可以把结论修正为“绝大多数天鹅是白色的，少数天鹅是黑色的”。原来的结论尽管错了，但是错得并不离谱。甚至在我们知道了黑天鹅存在的情况下，某些时候依然假设所有天鹅都是白色的，这样处理起问题来可能比“99%的天鹅是白色的，剩下1%是黑色的”这个绝对的真理更方便。正像我们经常说地球是圆的，学习甚至研究中经常假设地球是完美球体一样。这要比“赤道略鼓、两极稍扁”省事多了。何况后者也还只是个近似。

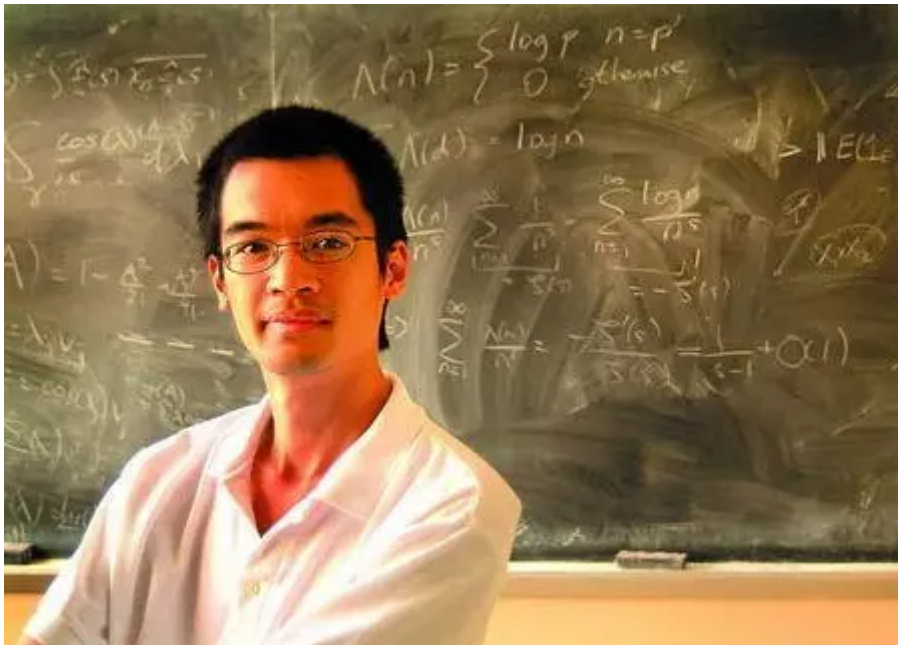
这种思维跟数学乍一看似乎是毫不相干甚至矛盾的。其实不然。一方面，数学本身就是一个高度抽象的模型，数学尤其是数学模型，本身就是对现实世界的近似，就是1、2、3这些最朴素的自然数也无不如此。3个人分6个苹果，如何分最公平啊？小学生就开始学，6除以3等于2，每人两个最公平。可是这样没考虑苹果的大小啊？您可能会说，我们假设6个苹果是一模一样大的。可天底下哪有绝对一模一样的6个苹果啊？我们这样假设就是一种近似。另一方面，放弃精确和严密而只求一个粗略的估计，这本身也是一种重要的数学能力。

直觉是数学学习和研究中非常重要的一种跟逻辑无关的能力。见了一个题目就知道大概用什么方法，见了一个问题就知道其大概的难度，这是区分数学家水平高低的很好指标。数学教育中以此标准也能一定程度上用来衡量学生。

数学直觉靠的是经验积累加悟性，它当然并不总是对的。经常出错的或坏的数学直觉我们称之为“思维定势”，这是我们要尽量避免的东西。我们教学中经常提要避免思维定势，但很少提培养好的数学直觉。这是一个事物的两个方面。只强调一方面而忽略另外一方面显然是不合适的。

2.化整为零各个击破

因为我们能力实在有限，所以不要幻想一下子解决整个问题。如果能把大问题拆成小问题，我们今天解决一个，明天解决一个，问题最终不就完整解决了吗？何况，化整为零还有一个很大的好处就是大家可以分工协作。你解决这个，我解决那个，最终问题也能得到完满解决。历史上的数学研究经常是单打独斗，绝大多数重要成果都是一个人做出来的。现在时代不同了，数学家也越来越强调合作，因为大家越来越意识到个人能力的有限。比如有限单群的分类问题，是几百个数学家辛苦合作几十年才完全研究清楚的；当今的领袖数学家Tim Gowers和陶哲轩发起了Polymath Project的项目，号召大家一起攻克一些困难无比的问题（他们最新近的成果包括大大改进了张益唐在孪生素数猜想方面得到的下界）。



►菲尔兹奖得主、著名数学家陶哲轩

化整为零各个击破的策略对中学数学教育有何意义呢？老师们可能会说，这不就是我们常用的分情况讨论嘛！所以没有什么好神秘的。但是大家千万不要小瞧这个看起来似乎不值得一提的策略。它的确是我们攻克复杂问题的一大法宝。组合优化领域甚至专门为这个方法起了一个新名字，叫“分而治之”（divide and conquer）。

数学家做研究惯用的一个“伎俩”就是“加条件”。实在证明不过去了，怎么办呀？只好加条件了。如果加一个比较干净的条件以后发现结论能成立，也还不错。稍微想想你就明白了，所谓加条件就是分情况讨论。而分情况讨论这个方法之所以有效，也是因为我们处理每一种情况的时候实际上比研究整个问题时多了一个条件。

3.立足已知探索未知

因为我们能力实在有限，所以用全新的方法去思考一个跟已有知识体系没有任何联系的问题可能毫无所获。所以一方面，我们要牢牢把握住已经知道的，尝试将未知的问题划归成一个我们熟悉的场景。这是科学研究的基本方法，也是数学教学中常用的一种范式。解题如此，讲课也是如此。另一方面，我们要充分挖掘已知知识的内在逻辑，看看从已知我们还能推导出其它什么有趣、但暂时不见得有用的新知识。我们今天的数学知识体系，部分内容直接来自现实和实践的驱动，即问题驱动；更多高深的内容则来自数学体系内在的驱动，即理论驱动，说白了就是数学家兴趣的推动。比如“P 与 NP 猜想”，跟现实究竟有什么联系？证明出来有什么用？老实说，短期来看可能真没什么用。

立足已知探索未知，从两个方向在已知与未知之间建立桥梁。这跟我们数学教学又有什么关系呢？关系大了。我们解题不是经常用两种思路吗，即综合法和分析法。所谓综合法，就是从条件

到结论的思维和写作方式。给了我们这样几个条件，从它们出发，朝着结论的方向我们一步步推导，然后顺利到达终点。这就是综合法；如果方向是从结论到条件，则称之为分析法。我们首先盯住这个结论，问想要得到这个结论需要知道什么条件呢？为了得到那个条件我们又需要证明什么呢？这样一步步推导，顺利到达已知的条件，整个证明就结束了。当然，很多时候这两种方法交叉使用。就写作而言，分析法和综合法各有利弊，分析法更容易让人把握住思路，但是可能不够简洁漂亮。综合法的写作则相反，经常让人赞叹证明的优美，感慨作者的奇思妙想，但是通常很难把握其思路。这两种写作方法的典型代表分别是欧拉和高斯。



►著名数学家高斯（左）、欧拉（右），图片来自Wikipedia

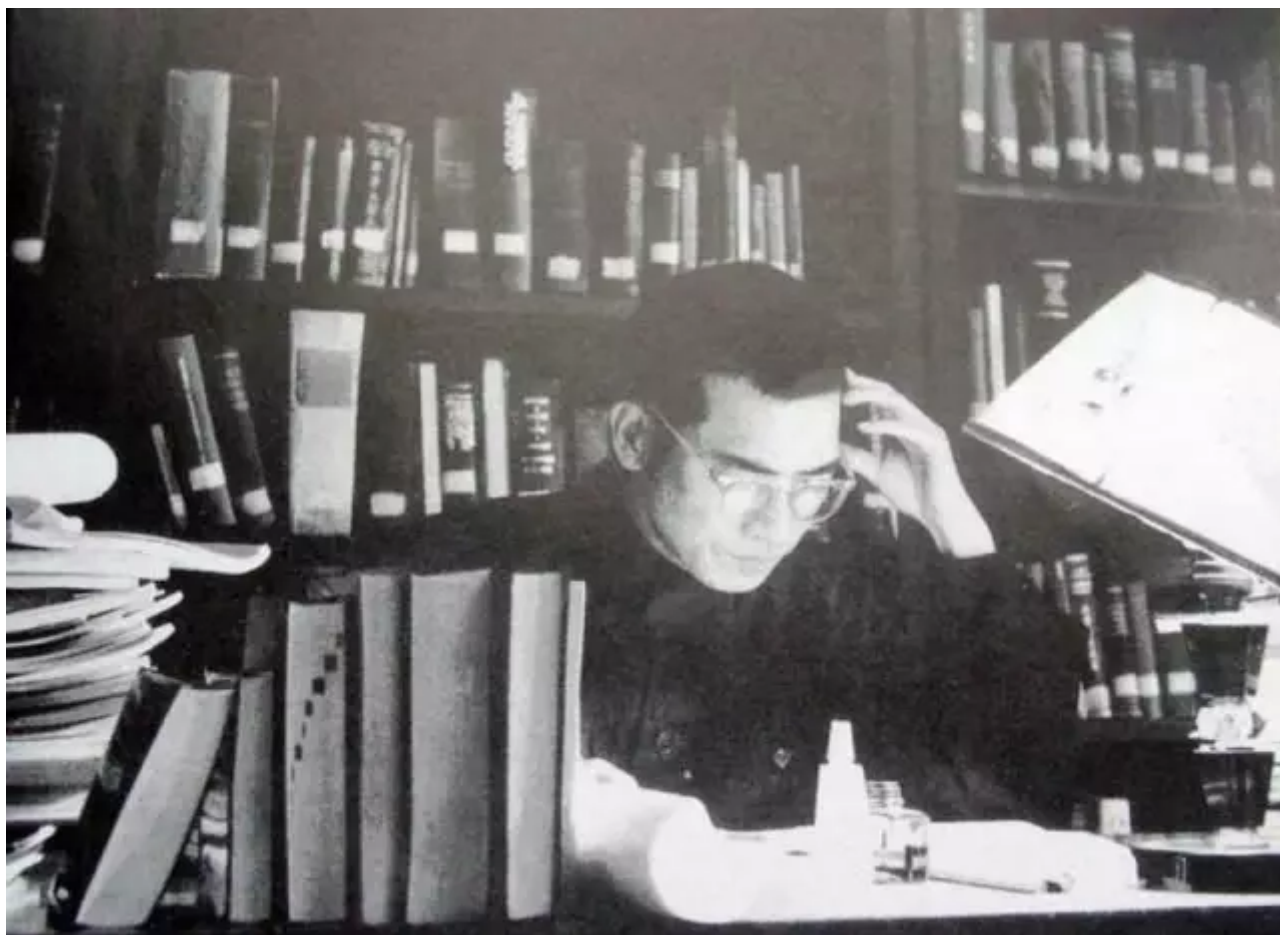
回到本文主题，分析法和综合法这两个名词的存在同样是基于我们能力有限的事实。如果我们绝顶聪明一眼就能看出条件与结论之间的关系，也就无所谓从哪里到哪里的方向问题了。

前面我们提到，分情况讨论本质上就是加条件扩大已知。所以笨人解决问题的一个思路就是，既然我笨，就想办法造一些条件，那样我思考问题不就便利多了吗？我们可以在这个视角下重新审视一下反证法和数学归纳法。反证法为什么经常有效？就是因为我们把结论的否命题拿来当条件，这样手头就增加了一个条件，前进起来当然便利多了。科学研究中还有一些更精细的反证法，比如特殊反例法，就是说如果结论不成立那么我能找到一个反例，除此以外这个反例还满足一定的条件（比如所有反例中规模最小的），那条件不是更多了吗？

数学归纳法则是更加巧妙地不断扩大已知最终到达未知的方法。要求证明某个结论对于任意的 n 都成立。问题太难了，丝毫没有头绪，怎么办？先试试 $n=1$ 吧。稍微一验证，嗯，对了。再来看看 $n=2$ 吧。嗯，也对了。可这什么时候是个头啊？验算到100我们能止步吗？不行，万一101出问题怎么办？我们不能满足于普通的归纳法。问题的难点在于，这表面上看起来是一个命题，而其实背后是无穷多个命题。无穷是数学里面的魔鬼，经常暗含很多奇特而艰深的东西。特别地，我们最笨的枚举法不能生效。数学归纳法的巧妙之处就在于，不是孤立地去验证一个一个的例子，而是在这些例子间建立一个链式反应，证明只要前者成立紧随其后的例子也成立。那么只要给一个初始引爆点，这一逻辑反复使用就会达到多米诺骨牌或者原子弹爆炸的效果，最终证明无穷多个命题。数学归纳法之所以能够成功，不也是巧妙加了一个条件吗？我们原来面对的问题是证明结论对于 n 成立。而现在面对的问题则是在 $n-1$ 成立的基础上来证明 n 成立。除了普通的数学归纳法以外，还有各式各样的变形。从增加条件的视角来看，这些方法背后的核心逻辑都是一致的。

我们再来看一下吴文俊先生“数学是笨人学的”的观点对于我们探讨解题方法好坏的判别标准问题的启发。用多种方法和思路解决同一题目是我们常用的教学方法。眼花缭乱的方法中哪种是最好的呢？这或许是个见仁见智没有标准答案的问题。很多人的观点可能是最巧妙的方法是最好的。其实并不见得如此。因为巧妙的方法适用范围通常都很窄，而表面上看起来很笨重的办法适用面则可能很广，往往可以直达问题本质所以威力巨大（比如说三角函数里面的万能公式）。功利一点来看，即便对于学生考试，巧妙的方法也不见得永远值得推荐。道理很简单，考试的有限时间里不见得能一下子想起那巧妙的方法，有时候反而是最普通的最笨的方法最有效。

做数学研究也有类似的道理，只有脚踏实地不投机取巧才能真正成就一番事业。华罗庚先生的成名作《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》，不就是老老实实计算一个十二阶行列式吗？陈景润证明“哥德巴赫猜想”的 $1+2$ 也没有引入多少天才的想法，就是扎扎实实用好了筛法。最新近的传奇数学家张益唐，能成功的原因之一也是老老实实去推导和计算一些基本公式，而不是讨巧直接使用已知公式。有了这些道理和例子，我们或许就能真正明白为什么吴文俊先生会说“数学是笨人学的”这样一番话。



►著名数学家陈景润

结 语

认清自己，承认我们都很笨；认清现实，知道问题很复杂；绝不气馁绝不讨巧，踏踏实实一步一步往前走。这种积极而务实的态度或许就是吴文俊先生想告诉我们的做学问的道理，同时也是做人的道理。历史上聪明绝伦有天赋的人多了去了，但是最终能有所成就为人类进步事业做出贡献的只是极少数。这极少数人通常都有一个共同点，那就是积极而务实，既不自暴自弃也不好高骛远。

“数学是笨人学的”这一积极而务实的态度不仅对于数学教学有重要启发，使我们对一些经常使用的方法和技巧进行重新审视、在整体上进行把握；它对于德育工作也很有启迪。比如说我们经常讲赏识教育。其实不分缘由不讲方法的一味赏识和夸奖并不见得有益。夸奖什么以及如何夸奖，这是需要我们好好琢磨的。据笔者所知一些好的经验是这样的：尽量少夸奖一个孩子聪明甚至有天赋，而多夸奖他的尝试、付出和努力过程。在我看来，这个精神跟吴文俊先生告诉我们的道理有内在的一致性。📖

制版编辑：李 赫 |