浅析吴文俊先生的示嵌类和示痕类

原创 2017-05-17 顾险峰 老顾谈几何

2017年五月13日，老顾受朋友之托来到阔别多年的麻省理工参加中国科协和吉林省联合主办的美东创业大赛。在会议上，老顾和很多老朋友久别重逢，特别是十四年未见的孙友顺博士。孙博士目前已是波士顿地区的华侨领袖，每年领导主持多次创业大赛。经孙博士的介绍，老顾结实了许多科学家、企业家和投资天使。作为一名评委，老顾有幸向很多科技前辈和青年才俊学习。创业团队来自全世界各地，创业主题涵盖了几乎当今工程和医疗的所有热门方向，人工智能、大数据、社交网络、虚拟现实、智能汽车、新型能源、纳米环保，基因测序，三维打印，精准医疗等等。创业项目展示的各种技术，琳琅满目，很多都有强烈的颠覆性。创业者们指点江山，豪情满怀；依随国力崛起，来自祖国的经济支持更是空前强大。这些都令人激情澎湃，血脉偾张。创业大赛是在MIT的Stata Center举行，这是一个颇具魔幻色彩的传奇所在。

图1. 麻省理工大学的Stata Center

麻省理工大学的 Stata中心是Pritzker奖得主 Frank Gehry的旷世杰作。这座建筑狂野不羁，随心所欲，看上去时刻摇摇欲坠。倾斜的墙面，扭曲的屋顶；红砖、铝材、玻璃，各种材质杂乱无章；天蓝、明黄、赭红，各种颜色鲜明夺目而又冲突刺眼；整幢建筑犹如各种构件随机堆砌而成，彻底解构了有关建筑美学的一切标准，因而在历史上曾经引发了巨大的争议。其实这正是Gehry所要表达的哲学思想，惊世骇俗的建筑造型隐喻了科学研究所需要的核心精神特质：自由、创造、独立、果决、异想天开，无所畏惧！

老顾坐在Stata Center的一间会议室中参加比赛，四周墙壁由硬木装饰，呈现标准的圆柱形，天顶中央是六角形的天窗，采光充分，宽敞明亮。但是老顾隐隐地觉得哪里不对：墙壁笔直平整，中规中矩，环顾四周，看不到任何缠绕扭曲。但是老顾深知，Stata Center没有一间教室是“正常的”，如此正常的教室只能有一种可能：那就是观察者自身“精神错乱”！大惊失色之下，老顾小心翼翼地仔细观察，终于看出了端弥：地板和圆柱形的墙壁并不垂直。老顾无法直接判断是地板倾斜还是墙壁倾斜，最后通过测试重力方向，终于发现圆柱形墙壁的中轴线和铅直线呈数十度夹角。在这座令人迷狂的建筑物内部，一切空间和几何都是错乱的，不通过重力，只凭视觉人们无法直接判定垂直还是倾斜，光顺还是扭转，平坦还是弯曲。在这个空间中，人类直觉不再可靠，只能用严格的代数拓扑和微分几何的计算来取代生理的空间感知。对于空间扭曲的一个强有力的理论，就是吴文俊先生的开创的示嵌类和示痕类。

吴文俊先生为拓扑学很多方面的发展做出了不可磨灭的贡献，他的示性类理论彪炳千秋，他的示痕类和示嵌类理论具有极大的实用价值，非常值得我们后人进一步钻研和继承。这里，我们简略介绍示嵌类和示痕类的基本思想，希望能够对于工程实践有所启迪和帮助。

示痕类

我们用扭结来解释示痕类的来龙去脉。一个拓扑流形可以用不同的方式嵌入在另外一个流形之中：例如我们可以将一条圆圈以无穷多种不同的方式嵌入在三维欧式空间之中，每一种嵌入都得到一种扭结（knot）。不打结的嵌入方式被称为是平庸扭结。如果在物理上，我们能够将一个扭结逐渐变换成另外一个扭结，这意味着在渐变过程中扭结在三维空间中不自相交，则我们说这两个扭结“同痕”（isotopy）。稍微精确一些，给定从单位圆周$\mathbb{S}^1$到三维欧式空间$\mathbb{R}^3$中的嵌入，$f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$，如果存在一个同伦变换连接$f_0, f_1$，

$$F : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3, \quad F(0,\cdot) = f_0, F(1,\cdot) = f_1$$

同时在任意时刻t，映射$f_t = F(t,\cdot) : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$是嵌入，则我们说$f_0, f_1$同痕（isotopy）。这样，我们可以将所有的扭结进行同痕分类。那么如何判定两个扭结同痕等价（isotopic equivalent）呢？这需要寻找一些同痕拓扑不变量。

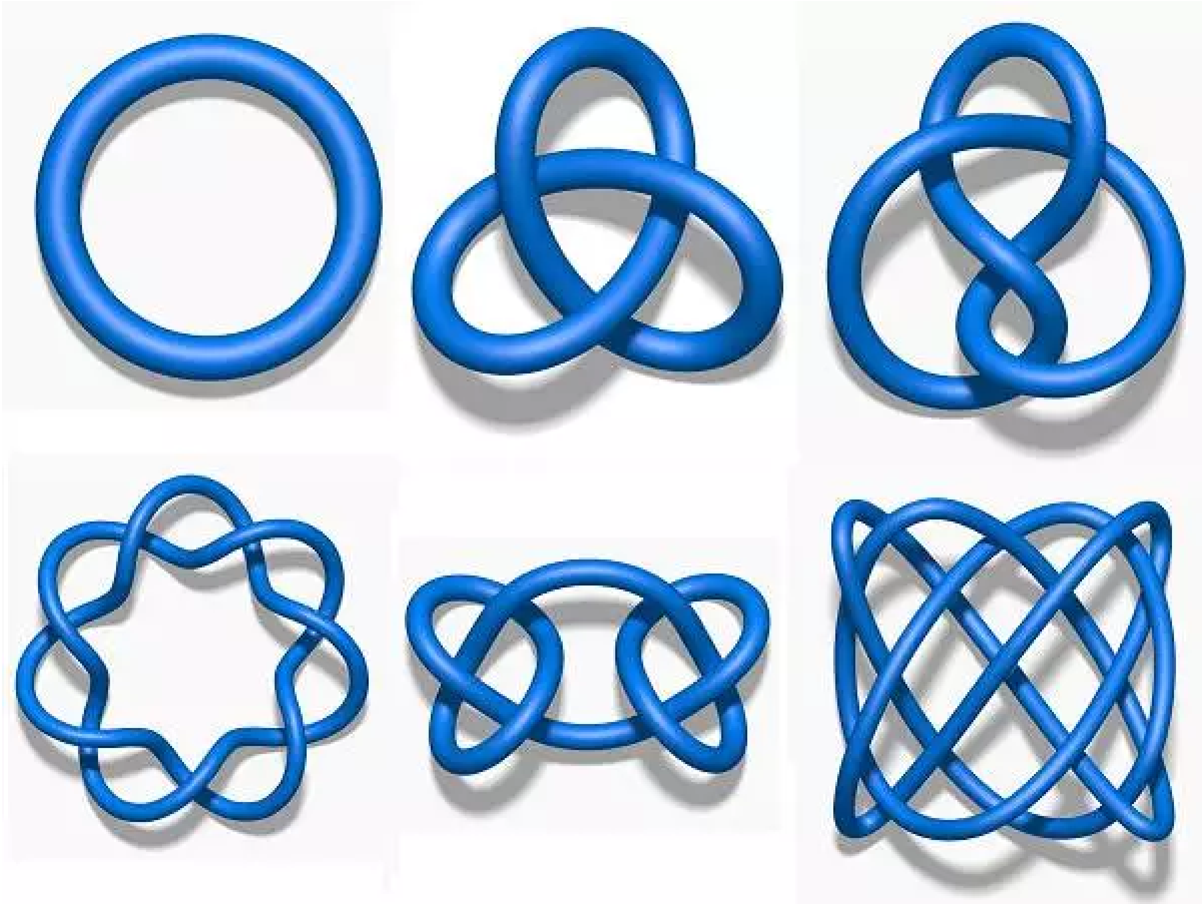

图2. 扭结（knots）。

比较常见的方法大致如下几种：补空间的同伦群，补空间的标准度量和吴先生的示痕类。

补空间的同伦群：我们可以将三维欧式空间加上一个无穷远点，构成一个三维球面，$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^3$，我们用$K \subset \mathbb{R}^3$来表示一个扭结，扭结的补空间为$\mathbb{S}^3 \setminus K$，其一维同伦群（基本群）为$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$。两个扭结同痕，当且仅当它们对应的补空间基本群同构，

$$K_1 \sim K_2 \Leftrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_2)。$$

计算补空间基本群的一种表示形式是线性复杂度的，但是判定两个表示所代表的群是否同构却是指数级的。因此，运用补空间基本群同构来判定扭结同痕不太现实。

补空间的标准度量：根据瑟斯顿（Bill Thurston）的三维流形几何化定理（Geometrization），如果扭结的扭曲缠绕模式比较复杂，则其补空间$\mathbb{S}^3 \setminus K$容许一个常值曲率的黎曼度量，例如双曲度量$\mathbf{g}$。两个扭结同痕，当且仅当它们对应的补空间配上标准度量后彼此等距，

$$K_1 \sim K_2 \leftrightarrow (\mathbb{S}^3 \setminus K_1, \mathbf{g}_1) \cong (\mathbb{S}^3 \setminus K_2, \mathbf{g}_2)。$$

判定两个双曲三流形是否等距比较简单，但是计算标准黎曼度量相对复杂一些。

示痕类：上面的两种方法具有一定的适用范围，无法用来判断一般流形嵌入的同痕等价。吴先生的示痕类方法比较具有普适性，它可以用来对一般流形嵌入进行同痕分类。如图2所示，亏格为2的曲面S，以不同的方式嵌入在三维欧式空间中，并且这两种嵌入彼此不同痕。高维流形的嵌入无法被直接观察，因此其同痕判定更为困难。吴氏示痕类提供了一种计算手段来进行判断，从而使人类的理性思维超越了自然感官。

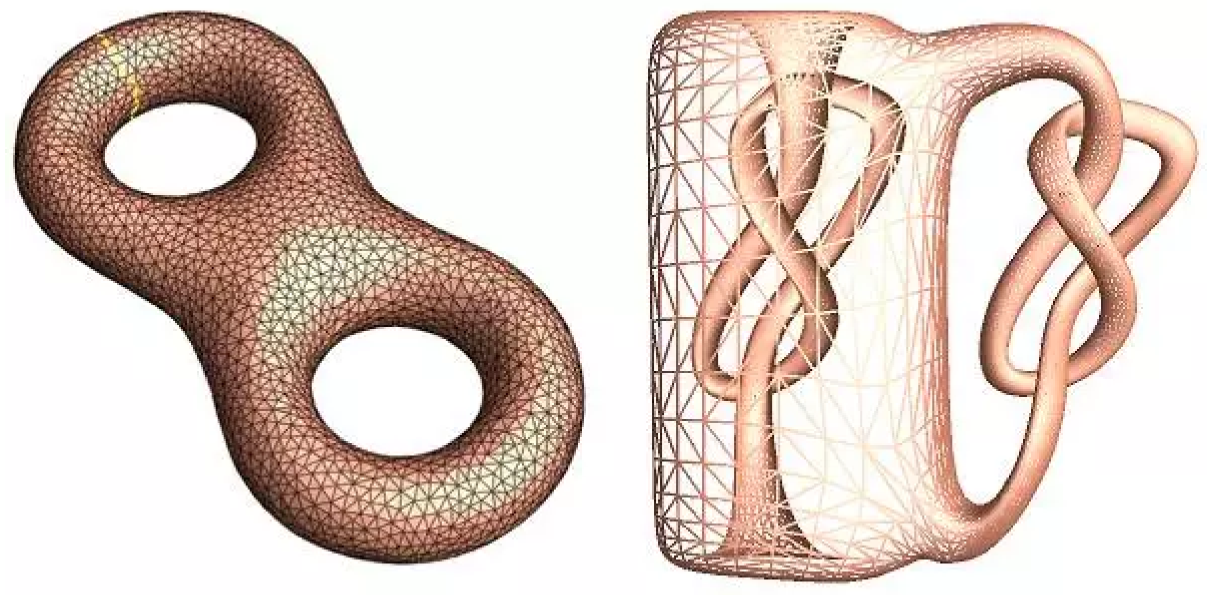

图3. 亏格为2曲面的不同嵌入。

代数拓扑的主要工具是同伦群（homotopy group）和同调群（homology group），它们可以用来判断两个流形是否是*同伦等价*（homotopic equivalence），而非*拓扑等价*（homeomorphic equivalence）。同伦等价远远弱于拓扑等价，例如圆柱面$\mathbb{S}^1 \times [0,1]$可以形变收缩成基线$\mathbb{S}^1$，其基线是圆柱面的形变收缩核（deformation retract center），因此两者同伦等价。同理，莫比乌斯带也和圆圈$\mathbb{S}^1$同伦等价，因此莫比乌斯带和圆柱面同伦等价。但是，圆柱面可以定向，莫比乌斯带不可以定向，两者之间不存在拓扑同胚（homeomorphism），拓扑不等价。考察流形X到Y的嵌$f: X \to Y$，则X和其像$f(X)$同胚，因此同痕类判定需要比同伦等价更强的不变量。吴先生应用“**去心积流形**”的手法，巧妙地将拓扑等价转化为同伦等价。这一手法鬼斧神工，浑然天成，堪称是旷世杰作。

给定流形X，其乘积流形为$X \times X$，乘积流形的对角线定义为

$$\Delta_X := \{(p,p) \in X \times X | p \in X\},$$

对角线Δ_X和X本身是拓扑同胚的。对角线的邻域和X的切丛同胚。进一步，去心积流形定义为

$$\tilde{X} := X \times X - \Delta_X。$$

同样，我们可以定义目标流形Y的去心积流形$\tilde{Y}$。

流形X到Y的嵌入$f: X \to Y$，自然诱导了去心积流形之间的嵌入，$\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$，这一步是整个构造的关键。任意一对相异的点，$p, q \in X, p \neq q$，具有不同的像$f(p) \neq f(q)$。因此映射，

$$(f, f): X \times X \to Y \times Y$$

将对角线Δ_X映射到Δ_Y上，Δ_Y的原像包含在Δ_X中，我们可以构造去心积流形之间的映射

$$\tilde{f} = (f, f): X \times X - \Delta_x \to Y \times Y - \Delta_Y$$

假如f不是嵌入（embedding），而是浸入（immersion），那么映射$\tilde{f}$并不存在。对于流形上任意一点$p \in X$，其像点为$f(p) \in Y$，如果存在一个邻域$U(p) \subset X$，使得映射f在$U(p)$上的限制为同胚，

$$f: U(p) \to f(U(p)),$$

则映射为浸入。但是，全局上浸入有可能存在相异的两点，$p, q \in X, p \neq q$，具有同样的像$f(p) = f(q)$。因此点$(p,q) \in X \times X$不在对角线Δ_X上，但是其像点$(f(p), f(q))$却在对角线Δ_Y上，

由此映射$\tilde{f}$并不存在。综上所述，去心积流形之间的映射$\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$已经隐含了嵌入映射的信息。

给定两个嵌入，$f_0, f_1: X\to Y$，那么从f_0到f_1的同痕变换自然地诱导了从$\tilde{f}_0$到$\tilde{f}_1$的同痕变换，自然也是从$\tilde{f}_0$到$\tilde{f}_1$的同伦变换。反之，如果f_0和f_1不同痕，那么在形变过程中，嵌入不被保持，去心流形$\tilde{X}$上的点有可能映到对角线Δ_Y上，即映到$\tilde{Y}$之外。由此，我们得到f_0和f_1的同痕的必要条件是$\tilde{f}_0$和$\tilde{f}_1$同伦等价。

映射$\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: \tilde{X}\to\tilde{Y}$诱导了去心积流形上同调群之间的映射，

$$\tilde{f}_0^*, \tilde{f}_1^*: H^k(\tilde{Y})\to H^k(\tilde{X}),$$

如果f_0和f_1同痕，那么$\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$同伦等价，$\tilde{f}_0^*, \tilde{f}_1^*$相等。例如，如果我们考察曲面到三维欧式空间中的嵌入，那么$H^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3-\Delta_{\mathbb{R}^3})$具有唯一的生成元$[\sigma]$，那么对应嵌入$f_i$的示痕类为$f_i^*([\sigma])$。如果$f_0$和$f_1$同痕，则其对应的示痕类相同$f_0^*([\sigma])=f_1^*([\sigma])$。

示痕类的方法给了我们一个普适的判断同痕的方法，这种方法是完全可以计算的。

示嵌类

给定两个流形，或者更为广泛的两个复形X, Y，我们需要判定是否存在嵌入$f: X\to Y$。一个最为简单的例子是平面图的判定问题。给定一个图（Graph）,如果不包含如图4所示的子图，则此图可以嵌入在平面上，

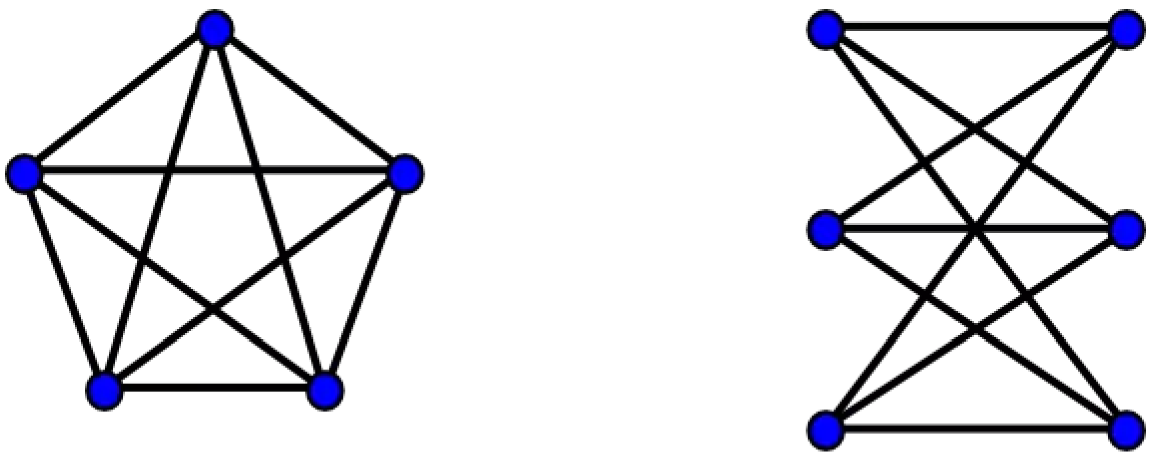

图4. 平面图判定。

如果平面图是3-联通的，则我们可以用类似离散Ricci流的方法实现一个到球面的几何嵌入，

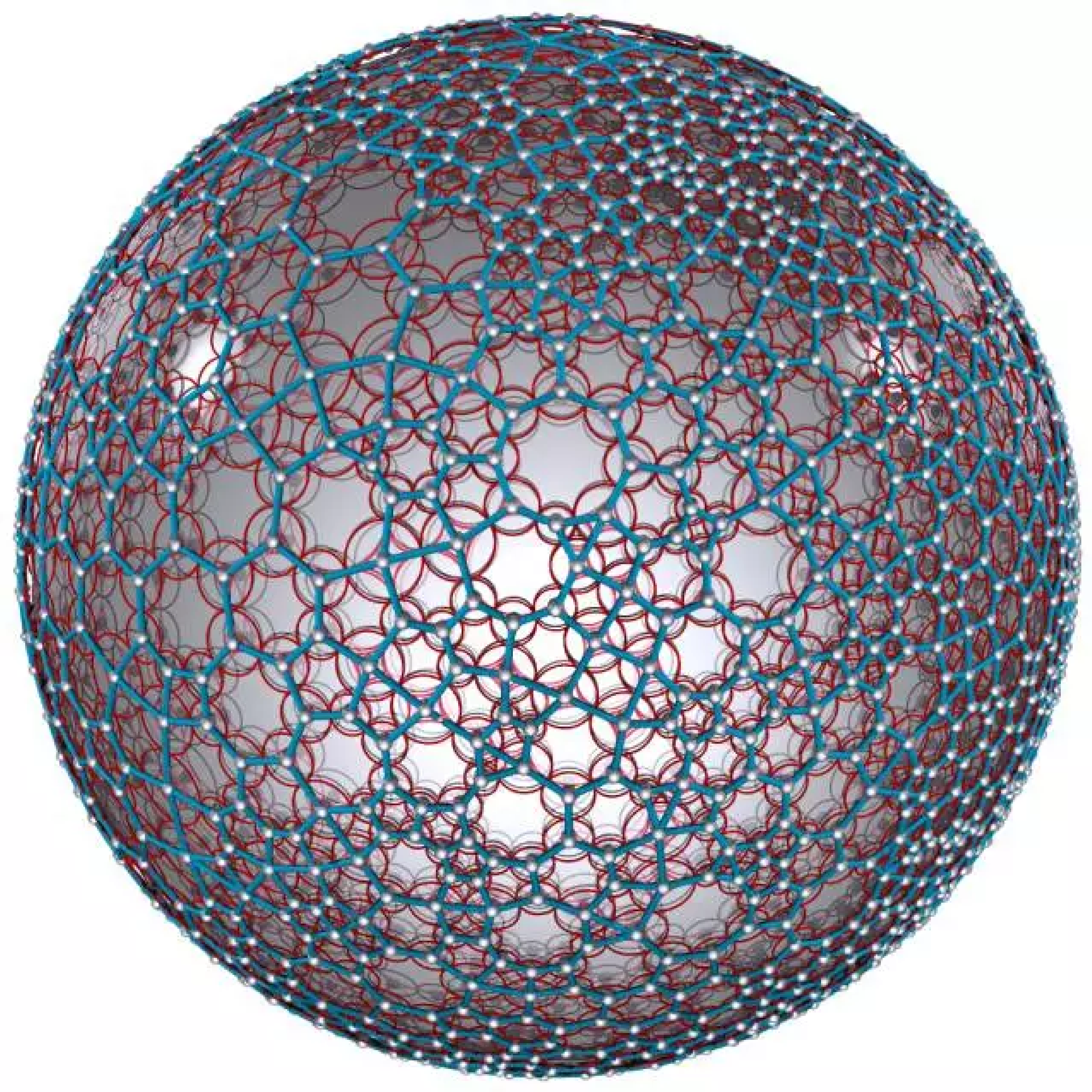

图5. 平面图的嵌入。

对于一般的拓扑流形，嵌入问题变得非常复杂。我们知道二维球面 无法嵌入在 上，但是可以嵌入在 中；二维的实射影平面 无法嵌入在 中，但却可以嵌入在4维欧式空间 中。吴先生的示嵌类对于可嵌入问题给出了部分解答。

我们在去心积流形 上定义一个等价关系， ，等价类记为 ，所得的商流形为

去心积流形到商流形存在一个投影映射

，

去心积流 形成为商流形 的二叶覆迭空间，其覆迭变换是一在 中没有不动点而周期为2的拓扑变换。我们称 为覆迭空间， 为轨道空间。

假设存在嵌入$f:X\to Y$，则f诱导了去心积流形(覆迭空间)的嵌入$\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$。流形间的嵌入自然地诱导映射轨道空间之间的嵌入$\bar{f}:\bar{X}\to\bar{Y},\ \bar{f}([p,q])=[f(p),f(q)]$，于是我们得到连续映射的可交换图象，

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "\pi_Y"] \\
\bar{X} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{Y}
\end{tikzcd}$$

吴先生的示嵌类本质上来源于这幅交换图。Smith的理论指出这样一对空间（覆迭空间，轨道空间）,$(\tilde{X},\bar{X})$可以配上一组上同调类

$$A^k(\tilde{X},\bar{X})\in H(\bar{X},I_{(k)}),\quad k\geq 0,$$

这里$I_{(k)}$等于整数群或模2整数加法群，视为k偶数或奇数而定。由于$\tilde{X},\bar{X},\pi_X$都是完全依赖于空间X，因此这些类$A^k(\tilde{X},\bar{X})$实际上是X自身的拓扑不变量，我们定义为

$$\Phi^k(X):=A^k(\tilde{X},\bar{X}),$$

被称为是空间X的示性类。同样，我们可以定义$\Phi^k(Y)$，由嵌入$f:X\to Y$，我们得到$f^*\Phi^k(Y)=\Phi^k(X)$。如果$\Phi^k(Y)$为0，则$\Phi^k(X)$必为0。例如，如果空间X可以嵌入在$\mathbb{R}^n$，则$\Phi^n(X)=0$。

下面，我们简单介绍一下Smith同调理论。给定复形K，其p重去心积流形为$\tilde{K}=K\times K\cdots\times K-\Delta_K$，这里$p$为素数。轮换映射$h:\tilde{K}\to\tilde{K}$定义为，

$$h(x_0,x_1,\dots,x_p)=(x_1,\dots,x_{p-1},x_0),$$

我们得到变换群$G=\{1,h,h^2,\cdots,h^{p-1}\}$。我们定义两个映射：

$$\begin{aligned}\rho &= 1+h+h^2+\cdots+h^{p-1}\\ \bar{\rho} &= 1-h\end{aligned}$$

可以直接证明

$$\rho\bar{\rho}=\bar{\rho}\rho=0, ker\,\rho=img\ \bar{\rho}\ ,$$

核空间和像空间都是线性空间，由此我们可以构造Smith上同调群，

$$H^*(ker\ \rho)=H^*(img\ \bar{\rho}),\quad H^*(ker\ \bar{\rho})=H^*(img\ \rho)。$$

进一步，我们可以得到正合列，

$$0\to ker\ \rho\xrightarrow{\iota_\rho}C^*(\tilde{K})\xrightarrow{\rho}img\ \rho\to 0,$$

这里ι_ρ是包含映射。我们可以得到正合三角形序列，

$$\begin{tikzcd}
 & H^*E \arrow[dr, "\rho"] & \\
H^*(ker\ \rho) \arrow[ur, "\iota_\rho"] & & H^*(img\ \rho) \arrow[ll, "\delta_\rho"]
\end{tikzcd}$$

这里δ_ρ是Smith上边缘算子，由此得到Smith同态，

$$\delta_\rho : H^n(img\ \rho) \to H^{n+1}(ker\ \rho),\ \ \delta_\rho[\rho x] = [\delta x]$$

令轨道空间为$\bar{K} = \tilde{K}/G$，投影映射为$\pi : \tilde{K} \to \bar{K}$。投影映射诱导了同构，

$$\pi^* : H^*\bar{K} \to H^*(ker\ \bar{\rho})\,;$$

类似地由投影

$$\bar{\pi} : \{ker\ \rho\} \to C(\bar{K}, \oplus_p^0 G)$$

我们得到同构

$$\bar{\pi}^* : H^*(\bar{K}, \oplus_p^0 G) \to H^*(ker\ \rho),$$

由此我们得到系列同态，

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{\bar{\rho}}"] & H^n(img\ \rho) \arrow[r, "\delta_\rho"] & H^{n+1}(ker\ \rho) \arrow[r, "\delta_{\bar{\rho}}"] & H^{n+2}(img\ \rho) \arrow[r, "\delta_\rho"] & {} \\
{} \arrow[r, "\mu_{n-1}"] & H^n(\bar{K}, G) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, "\mu_n"] & H^{n+1}(\bar{K}, \oplus_p^0 G) \arrow[u, "\bar{\pi}^*"] \arrow[r, "\mu_{n+1}"] & H^{n+2}(\bar{K}, G) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, "\mu_{n+2}"] & {}
\end{tikzcd}$$

令$\mathbf{1}_{\bar{K}} \in H^0(\bar{K}, G)$是单位上类，那么Smith上类定义为

$$A_K(\bar{K}) = \mu_k \circ \mu_{k-1} \circ \cdots \mu_0 \mathbf{1}_K。$$

这就是吴氏示嵌类。

应用

吴先生曾经用示嵌类理论来解决印刷电路与集成电路中的布线问题，其数学描述是一维复形在平面上的嵌入。在过去几年中，依随大数据和机器学习方法的兴起，拓扑方法已经被应用到大数据分析之中，从自然语言理解到社交网络分类，Persistent Homology 方法方兴未艾，已经显示了巨大的威力。

目前，各种流形学习，流形嵌入的算法不停地被发明出来。这些算法的理论根基还没有达到令人满意的严密程度，我们相信吴文俊先生的示嵌类和示痕类的方法将会大有用武之地，其深邃优美的思想将在新时代被继承发扬，大放异彩！

References

1. 可剖形在欧氏空间中的实现问题，吴文俊，科学出版社。
